

Qualidade da imagem retiniana

Óptica Visual

S. Mogo

Departamento de Física
Universidade da Beira Interior

2021 / 22

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qldd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

- 1 **Imagem retiniana**
 - Imagem óptica e imagem retiniana
 - Imagem retiniana em ametropias corrigidas
 - Imagem retiniana em ametropias não corrigidas
 - Furo estenopeico
 - Difracção
 - Critérios de resolução
- 2 **Aberrações do olho**
 - Aberrações cromáticas
 - Aberrações monocromáticas
 - Aberrometria
- 3 **Métricas de qualidade da imagem**
 - Diagramas de pontos
 - Funções de transferência
- 4 **Modelos esquemáticos do olho finitos**
 - Modelo do olho de Navarro
 - Modelo do olho de Liou-Brennan

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qldd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

- 1 Imagem retiniana**
 - Imagem óptica e imagem retiniana
 - Imagem retiniana em ametropias corrigidas
 - Imagem retiniana em ametropias não corrigidas
 - Furo estenopeico
 - Difracção
 - Critérios de resolução
- 2 Aberrações do olho**
 - Aberrações cromáticas
 - Aberrações monocromáticas
 - Aberrometria
- 3 Métricas de qualidade da imagem**
 - Diagramas de pontos
 - Funções de transferência
- 4 Modelos esquemáticos do olho finitos**
 - Modelo do olho de Navarro
 - Modelo do olho de Liou-Brennan

Imagem óptica e imagem retiniana

Img. retiniana

Óptica x retiniana

Ametrop. corrigidas

Ametrop. n corrigidas

Furo estenopeico

Difracção

Crítério de resolução

Aberrações

A. cromáticas

A. monocromáticas

Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos

Funções transfer.

Model. finitos

Navarro

Liou-Brennan

Imagem óptica → é a imagem **nítida** formada pelo sistema refractor do olho sem a retina estar presente.



Imagem retiniana → é a imagem que o sistema refractor do olho forma sobre a retina (pode ser focada ou desfocada).



A formação de imagem óptica não será possível se ela se situar para trás da retina (hipermetropia).

Imagem óptica e imagem retiniana

Img. retiniana

Óptica x retiniana

Ametrop. corrigidas

Ametrop. n corrigidas

Furo estenopeico

Difracção

Crítério de resolução

Aberrações

A. cromáticas

A. monocromáticas

Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos

Funções transfer.

Model. finitos

Navarro

Liou-Brennan

Exemplo:

Um objecto com altura 50 mm está situado no eixo óptico de um olho reduzido emétrope a 250 mm do seu ponto principal.

Determine se é possível a formação de imagem óptica e, em caso afirmativo, encontre a sua posição e o seu tamanho.

Img. retiniana

Óptica x retiniana

Ametrop. corrigidas

Ametrop. n corrigidas

Furo estenopeico

Difracção

Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas

A. monocromáticas

Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos

Funções transfer.

Model. finitos

Navarro

Liou-Brennan

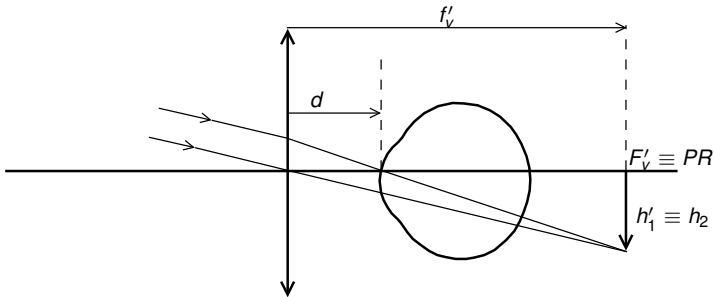
Imagem retiniana em ametropias corrigidas

A compensação de ametropias com lentes, pode ser vista como um sistema de 2 lentes em que:

- 1 a lente correctora forma uma imagem de um objecto situado no infinito óptico;
- 2 esta imagem torna-se um objecto para o olho;
- 3 o olho forma na retina a imagem desse objecto.

Hipermétrope

No caso do hipermétrope, a imagem formada pela lente correctora funciona como objecto virtual para o olho:



Hipermétrope

No caso do hipermetrope, a imagem formada pela lente correctora funciona como objecto virtual para o olho:

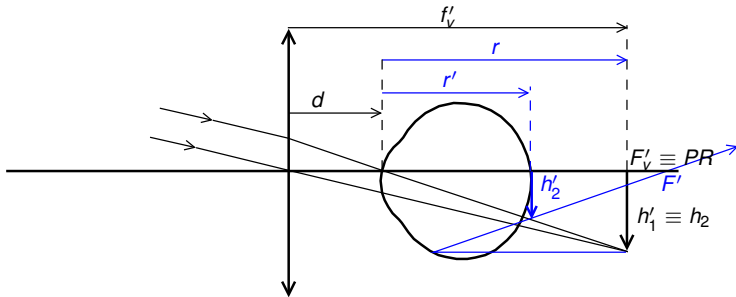
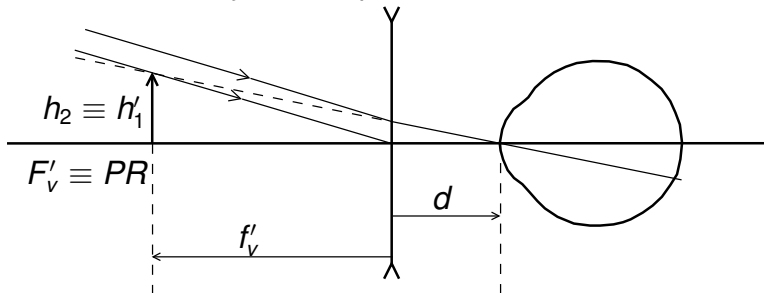


Imagem retiniana em ametropias corrigidas

Míope

No caso do míope, a imagem formada pela lente correctora funciona como objecto real para o olho:



No caso do míope, a imagem formada pela lente correctora funciona como objecto real para o olho:

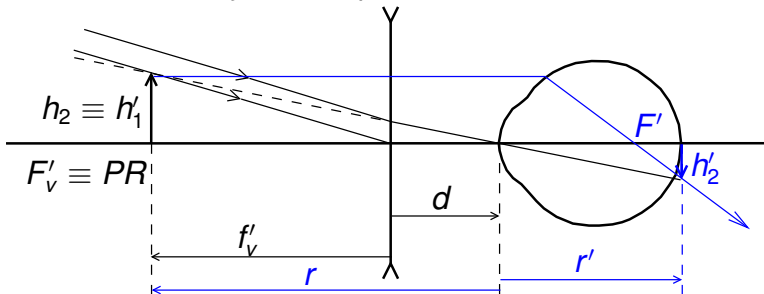
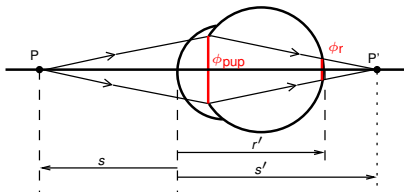


Imagem retiniana em ametropias não corrigidas

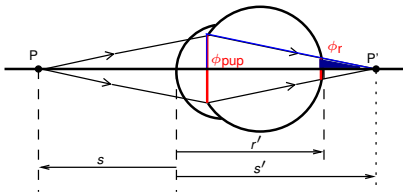
Agora vamos considerar a imagem desfocada formada na retina de um olho amétrope não corrigido:



- Para a imagem ser nítida, r' deveria ser igual a s' ;
- quando não são iguais, a imagem de um ponto formada na retina é um círculo difuso;
- o tamanho desse círculo, ϕ_r , depende de:
 - ϕ_{pup} — diâmetro da pupila (limita o feixe procedente do ponto P que pode entrar no olho);
 - r' — comprimento axial do olho;
 - s' — posição onde se formaria a imagem nítida.

Imagem retiniana em ametropias não corrigidas

Considerando os 2 triângulos semelhantes:



$$\frac{\phi_{pup}/2}{\phi_r/2} = \frac{s'}{s' - r'} \Rightarrow \phi_r = \phi_{pup} \left(\frac{s' - r'}{s'} \right)$$

$$V' = \frac{n'}{s'} \quad \wedge \quad R'_{oc} = \frac{n'}{r'}$$

$$\Rightarrow \phi_r = \phi_{pup} \left(\frac{R'_{oc} - V'}{R'_{oc}} \right)$$

Imagem retiniana em ametropias não corrigidas

Contribuição da pupila

$$\phi_r = \phi_{\text{pup}} \left(\frac{R'_{oc} - V'}{R'_{oc}} \right)$$

Assim, o diâmetro do círculo difuso e o diâmetro da pupila estão directamente relacionados: $\phi_{\text{pup}} \Rightarrow \phi_r$, mostrando que a pupila possui um papel fundamental na formação da imagem retiniana.



Pode ocorrer que:

- indivíduos com miopia mais elevada e pupila pequena, vejam melhor do que outros com miopia mais baixa (mas pupila maior).

Furo estenopeico

Furo estenopeico → pupila artificial com 1 mm de diâmetro que apenas deixa passar um pequeno feixe de raios luminosos.

$$\phi_r = \phi_{\text{pup}} \left(\frac{R'_{oc} - V'}{R'_{oc}} \right)$$

Utilidade clínica do furo estenopeico:

- o tamanho dos círculos difusos na retina reduz-se de tal maneira que há uma melhoria aparente da visão;
- se esta melhoria não for observada, indica a existência de um problema de origem funcional (uma patologia e não um erro refractivo).

Furo estenopeico

Img. retiniana

Óptica x retiniana

Ametrop. corrigidas

Ametrop. n corrigidas

Furo estenopeico

Difracção

Crítério de resolução

Aberrações

A. cromáticas

A. monocromáticas

Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos

Funções transfer.

Model. finitos

Navarro

Liou-Brennan

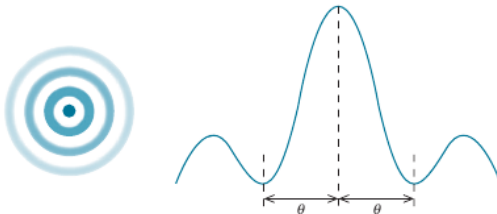
Os optótipos são objectos extensos formados por conjuntos de pontos (círculos difusos).



Schwartz, S., Geometrical and Visual Optics: A Clinical Introduction. 3rd. Ed., McGrawHill, 2019.

Difracção

Recordar que a dimensão angular do disco de Airy é:



$$\omega = 2\theta = 2,44 \frac{\lambda}{\phi_{\text{pup}}}$$

onde λ é o c.d.o. da luz e ϕ_{pup} é o diâmetro da pupila.

Crítérios de resolução

Quando observamos 2 objectos pontuais, colocados lado a lado, formam-se 2 padrões de difracção, cada um com o seu disco de Airy.



Como $\omega = 2,44 \frac{\lambda}{\phi_{pup}}$, vemos que quanto mais pequena for a pupila, maior será o diâmetro do disco de Airy.

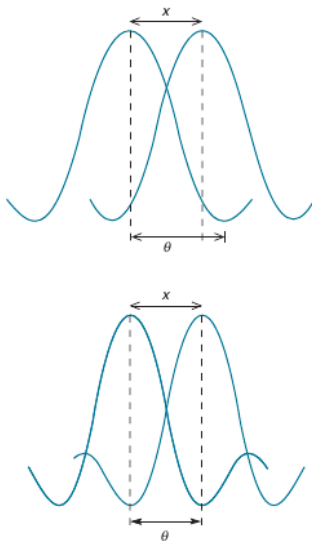


Pode ocorrer sobreposição dos dois padrões!



Critérios de resolução

Critério de Rayleigh



Critério de resolução de Rayleigh:

- estabelece que para 2 objectos poderem ser resolvidos, o máximo central do disco de Airy de um dos objectos, deve coincidir com o primeiro mínimo do disco de Airy outro objecto.

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qldd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

1

Imagem retiniana

Imagem óptica e imagem retiniana
Imagem retiniana em ametropias corrigidas
Imagem retiniana em ametropias não corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critérios de resolução

2

Aberrações do olho

Aberrações cromáticas
Aberrações monocromáticas
Aberrometria

3

Métricas de qualidade da imagem

Diagramas de pontos
Funções de transferência

4

Modelos esquemáticos do olho finitos

Modelo do olho de Navarro
Modelo do olho de Liou-Brennan

Aberrações do olho

Como todos os sistemas ópticos, o olho possui aberrações que degradam a qualidade da imagem por ele produzida.



Como já temos vindo a estudar:

- o olho não forma imagens pontuais a partir de objectos pontuais (já vimos que a difracção o impede);
- se considerarmos um objecto extenso, formado por muitos pontos, a imagem desse objecto não é uma cópia fiel dele;
- a posição/tamanho/forma da imagem não podem ser obtidos através de diagramas de raios que resultem apenas das leis da refacção e da reflexão (só é assim na região paraxial).

Estas 3 assumções só seriam válidas se considerássemos que:

- a luz é monocromática;
- a incidência de luz se faz na região paraxial.

Aberrações do olho

Para o caso do olho humano:

- concebido para luz branca: muitos c.d.o. \Rightarrow dispersão da luz \Rightarrow raios luminosos são mais ou menos desviados, dependendo do seu c.d.o.;
- nem todos os raios incidem na região paraxial \Rightarrow $\alpha \neq \sin \alpha \neq \tan \alpha$ (teoria paraxial ou teoria de 1ª ordem — óptica gaussiana);
- fora da região paraxial, uma melhor estimativa de $\sin \alpha$ é obtida por: $\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$



Quando se utiliza a aproximação até à terceira ordem $(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!})$ — teoria de 3ª ordem — a imagem obtida difere daquela prevista pela teoria paraxial em 5 aspectos que são referidos como **aberrações de Seidel** ou **aberrações primárias**: aberração esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo e distorção.

Aberrações do olho

Como para qualquer outro sistema óptico, surgem então várias distorções da imagem que diminuem a sua qualidade.



Aberrações cromáticas → são devidas aos meios e desaparecem se a luz for monocromática.

- Aberração cromática axial ou longitudinal
- Aberração cromática lateral ou transversal

Aberrações monocromáticas → são devidas à forma das superfícies.

- Aberração esférica
- Coma
- Astigmatismo
- Curvatura de campo
- Distorção

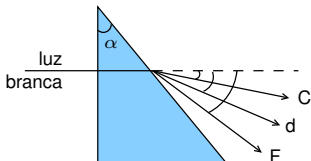
A. cromáticas

Diagramas de pontos

Navarro

Número de Abbe

(rever em Óptica Geométrica)



Desvio para os c.d.o. das riscas de Fraunhofer:

$$\delta_F = (n_F - 1)\alpha$$

$$\delta_d = (n_d - 1)\alpha$$

$$\delta_C = (n_C - 1)\alpha$$

$$\text{Poder dispersivo do prisma: } \frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{\delta_F - \delta_C}{\delta_d} = \frac{(n_F - 1)\alpha - (n_C - 1)\alpha}{(n_d - 1)\alpha} = \frac{n_F - n_C}{n_d - 1}$$

- Notar que o poder dispersivo do prisma não depende de α ;
- depende apenas do material do prisma;
- o seu inverso denomina-se **número de Abbe** ou **número \mathcal{V}** :

$$\gamma = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$

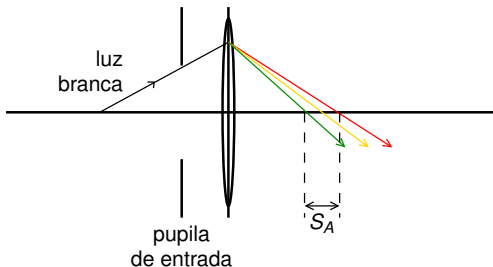
- maior número de Abbe, significa menor poder dispersivo.

Aberração cromática

Axial ou longitudinal

Aberração cromática axial → diferença no poder dióptrico para os c.d.o. correspondentes às linhas F e C.

$$S_A = F_F - F_C \quad [D]$$



Pode ser expressa em termos de distância no eixo óptico:

$$S_A = f_F - f_C \quad [\text{m}]$$

(distância sobre o eixo)

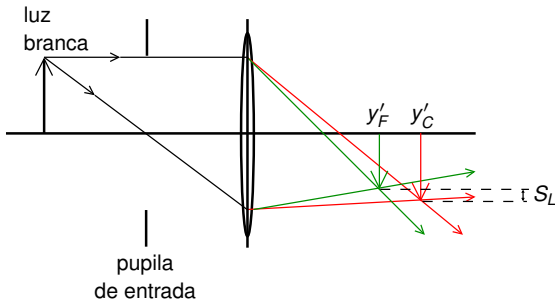
Aberração cromática

Transversal ou lateral

Aberração cromática transversal → diferença no poder prismático para os c.d.o. correspondentes às linhas F e C.

$$S_L = P_F - P_C \quad [\triangle]$$

(distância sobre o plano imagem)



Aberração cromática

Olho humano

Para radiação electromagnética situada entre 380 nm e 760 nm, **o olho humano apresenta uma aberração cromática de $\sim 2,50$ D**, que corresponde a uma distância linear de **$\sim 0,93$ mm**.

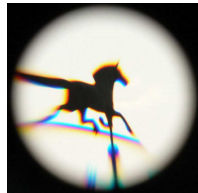


Normalmente não somos conscientes desta aberração mas pensa-se que pode funcionar como pista para o sistema visual saber se deve aumentar ou diminuir a sua potência (acomodar ou relaxar) quando se forma na retina a imagem desfocada de um objecto situado a distância diferente daquela que está a ser observada.

Aberração cromática

Lentes oftálmicas

Quando se prescrevem lentes com baixo número de Abbe (p.ex., lentes de policarbonato), se a potência for elevada, a aberração cromática da lente pode tornar-se aparente e o paciente manifesta ver franjas coloridas.



http://www.physics.purdue.edu/~jones105/phys42200_Spring2013/notes/Phys42200_Lecture33.pdf

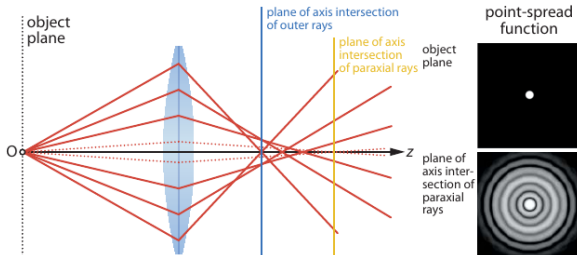


Correcção da aberração cromática em lentes:
podem ser utilizados pares acromáticos, doubletes ou mesmo tripletes.

Aberrações monocromáticas

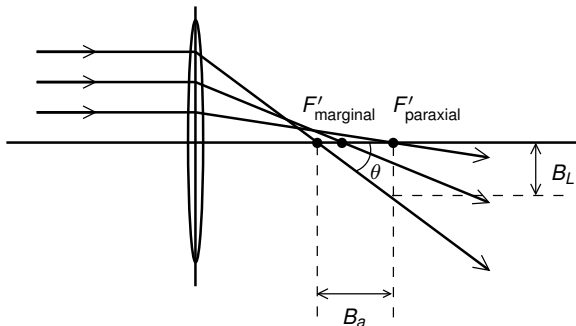
Aberração esférica

Aberração esférica → resulta do facto de os raios não paraxiais focarem mais cedo que os raios paraxiais.



Aberrações monocromáticas

Aberração esférica axial e lateral



Aberração esférica axial

$$B_A = f'_{\text{marginal}} - f'_{\text{paraxial}}$$

(distância sobre o eixo)

Aberração esférica lateral

$$B_L = B_A \tan \theta$$

(distância sobre o plano imagem)

Aberrações monocromáticas

Aberração esférica e miopia noturna

Img. retiniana

Óptica x retiniana

Ametrop. corrigidas

Ametrop. n corrigidas

Furo estenopeico

Difração

Crítério de resolução

Aberrações

A. cromáticas

A. monocromáticas

Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos

Funções transfer.

Model. finitos

Navarro

Liou-Brennan

Em condições de baixa iluminação a pupila do olho humano aumenta de diâmetro deixando passar mais raios marginais.



Esses raios podem ser focados à frente da retina, contribuindo para uma condição denominada **miopia noturna**.

Miopia noturna → condição em que o olho se torna míope apenas em baixas condições de iluminação.

(Condução noturna)

Aberrações monocromáticas

Correcção da aberração esférica

Img. retiniana

Óptica x retiniana

Ametrop. corrigidas

Ametrop. n corrigidas

Furo estenopeico

Difracção

Crítério de resolução

Aberrações

A. cromáticas

A. monocromáticas

Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos

Funções transfer.

Model. finitos

Navarro

Liou-Brennan

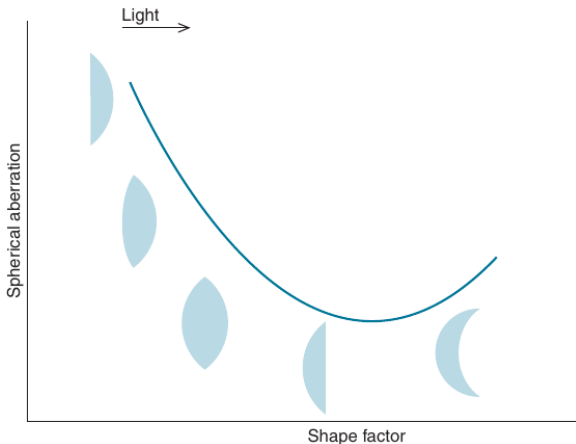
A correcção da aberração esférica em lentes pode ser conseguida:

- diminuindo o **diâmetro da pupila de entrada**
(inconveniente de perdermos energia)
- usando **superfícies asféricas**
(inconveniente de maior dificuldade de fabrico \Rightarrow maior preço)
- usando **lentes GRIN** (*Gradient index*)
(inconveniente de maior dificuldade de fabrico \Rightarrow maior preço)
- alterando o **factor de forma de Coddington**: $\sigma = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1}$
 r_1, r_2 — raios de curvatura das 2 superfícies da lente
(joga com a curvatura das superfícies na fórmula dos fabricantes de lentes)
- usando várias lentes — **lente composta**.

Aberrações monocromáticas

Aberração esférica e lentes oftálmicas

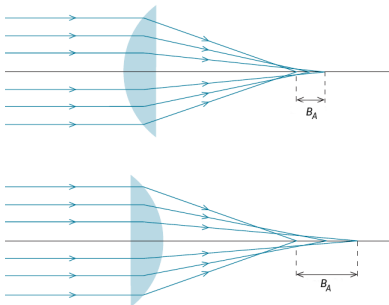
Utilização do **factor de forma de Coddington** para controlar a aberração esférica:



Aberrações monocromáticas

Aberração esférica e lentes oftálmicas

Numa lente plano-convexa, a aberração esférica axial é mínima quando os raios luminosos incidem na superfície convexa:

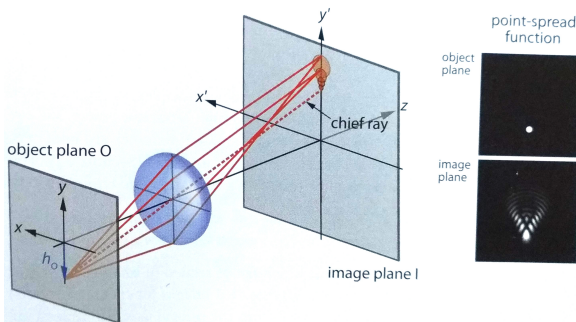


Colocação da lente oftálmica na armação.

Aberrações monocromáticas

Coma

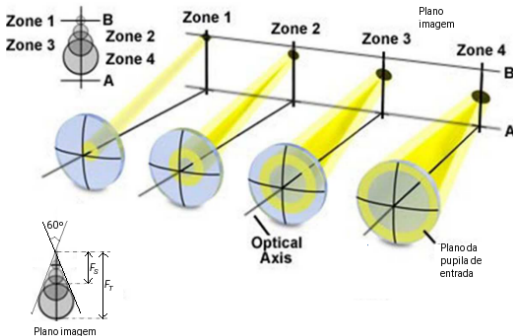
Coma → aberração devida ao facto de os planos objecto e imagem só serem realmente planos na zona paraxial.



Aberrações monocromáticas

Círculo comático

Se um raio s descrever uma circunferência na pupila de entrada, o seu raio conjugado, s' , também descreve uma circunferência no espaço da imagem — **círculo comático**.



http://www.physics.purdue.edu/~jones105/phys42200_Spring2013/notes/Phys42200_Lecture33.pdf

No entanto, os feixes das circunferências com centro na pupila de entrada não coincidem com as circunferências concêntricas no plano da imagem:

- o aspecto da figura formada sugeriu o nome coma devido ao parecido com um cometa.



(distância sobre o plano imagem paraxial
entre o raio principal e o ponto médio
dos raios de bordo superior e inferior)

$$F_S = \frac{F_T}{3}$$

Aberrações monocromáticas

Correcção da coma — Sistemas aplanáticos

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

A aberração coma tem o mesmo tipo de soluções que a aberração esférica.



Um sistema óptico corrigido de aberração esférica e coma, denomina-se **aplanático**.

Aberrações monocromáticas

Coma — Olho humano

Img. retiniana

Óptica x retiniana

Ametrop. corrigidas

Ametrop. n corrigidas

Furo estenopeico

Difracção

Crítério de resolução

Aberrações

A. cromáticas

A. monocromáticas

Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos

Funções transfer.

Model. finitos

Navarro

Liou-Brennan

Como a córnea e o cristalino não estão perfeitamente centrados em relação à pupila, a aberração **coma** costuma estar presente em olhos humanos.



É percebido um objecto em forma de cometa quando o olho se encontra a observar um objecto pontual.

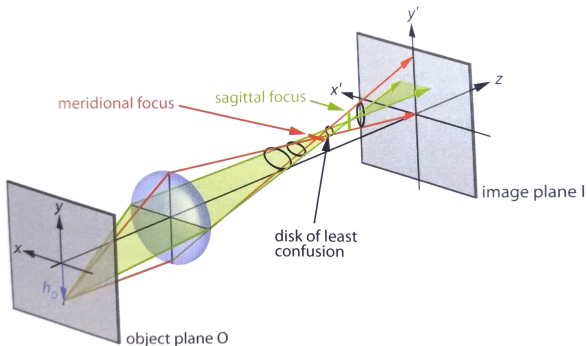


Um valor elevado de coma ($0,3 \mu\text{m}$ de apenas coma) pode ser um indicador de alguns problemas da córnea, p.ex., queratocone.

Aberrações monocromáticas

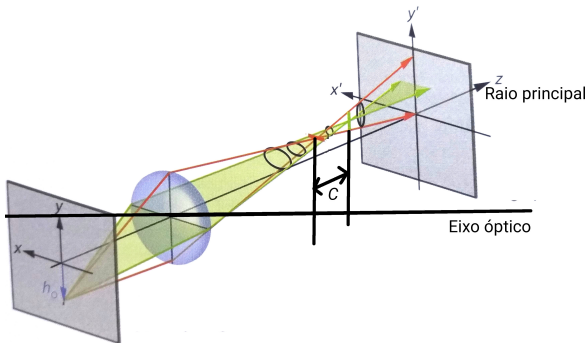
Astigmatismo oblíquo

Astigmatismo oblíquo → quando o objecto pontual está situado fora do eixo óptico, o cone de raios incide no sistema óptico de modo assimétrico, originando astigmatismo.



Aberrações monocromáticas

Astigmatismo oblíquo



Astigmatismo oblíquo

$$C = f'_S - f'_T$$

(distância no raio principal, entre as focais sagital e tangencial)

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difração
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qlidd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

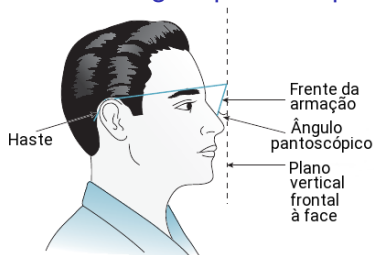
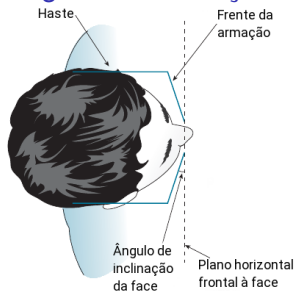
Astigmatismo oblíquo e lentes oftálmicas

Critério de resolução

Aberrometria

Funções transfer.

Liou-Brennan



Schwartz,S.. Geometrical and Visual Optics: A Clinical Introduction. 3rd. Ed., McGrawHill, 2019.

Aberrações monocromáticas

Correcção do astigmatismo

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qldd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

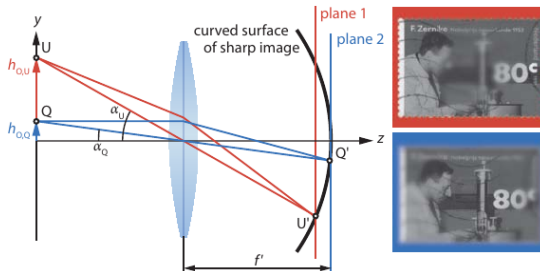
Navarro
Liou-Brennan

Um sistema óptico corrigido de astigmatismo denomina-se **anastigmático**.

Aberrações monocromáticas

Curvatura de campo

Curvatura de campo → é devida a que a imagem de um objecto plano só é plana na zona paraxial, na realidade, forma-se sobre uma superfície curva — **superfície de Petzval**.



Kaschke, M., Donnerhacke, K.-H., Stefan Rill, M., Optical Devices in Ophthalmology and Optometry: Technology, Design Principles, and Clinical Applications. Wiley-VCH, 2014.

Superfície de Petzval → é um paraboloide mas costuma ser substituída pela sua osculatriz de raio r_P .

Aberrações monocromáticas

Curvatura de campo e astigmatismo

Img. retiniana

Óptica x retiniana

Ametrop. corrigidas

Ametrop. n corrigidas

Furo estenopeico

Difracção

Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas

A. monocromáticas

Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos

Funções transfer.

Model. finitos

Navarro

Liou-Brennan

Quando existe astigmatismo, existem duas superfícies parabólicas: tangencial e sagital:

- nestes casos, observa-se o **teorema de Petzval**:

$$\frac{3}{r_S} - \frac{1}{r_T} = \frac{2}{r_P}$$



Quando o astigmatismo está corrigido $r_S = r_T \equiv r_P$, sendo r_P responsável pela curvatura de campo neste caso.

Aberrações monocromáticas

Curvatura de campo tangencial e sagital

Curvatura tangencial

$$C_{CT} = f'_T \cos \theta' + h - s'_{\text{paraxial}}$$

(distância sobre o eixo óptico, entre o vértice da última superfície e a projecção da focal tangencial)

Curvatura sagital

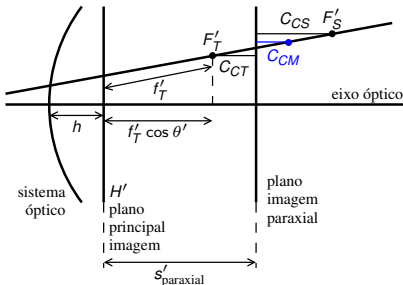
$$C_{CS} = f'_S \cos \theta' + h - s'_{\text{paraxial}}$$

(distância sobre o eixo óptico, entre o vértice da última superfície e a projecção da focal sagital)

Curvatura de campo

$$C_{CM} = \frac{3C_{CS} - C_{CT}}{2}$$

(distância sobre o eixo óptico, entre o vértice da última superfície e a projecção do ponto de menor confusão)



Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difração
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qldd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

Aberrações monocromáticas

Curvatura de campo

Img. retiniana

Óptica x retiniana

Ametrop. corrigidas

Ametrop. n corrigidas

Furo estenopeico

Difracção

Crítério de resolução

Aberrações

A. cromáticas

A. monocromáticas

Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos

Funções transfer.

Model. finitos

Navarro

Liou-Brennan

Correcção da curvatura de campo:

- a curvatura de campo é negativa para uma lente positiva e positiva para uma lente negativa;
- a correcção é realizada utilizando lentes de sinal contrário.

Aberrações monocromáticas

Curvatura de campo — Olho humano

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

Ter em conta que a retina também não é plana.



Pode existir uma ametropia na zona central da retina e
outra ametropia diferente na zona periférica.

Aberrações monocromáticas

Distorção

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

Distorção → resulta do facto de a ampliação, m , poder ser função da distância da imagem ao eixo, *i.e.*, a ampliação é diferente na zona central e na zona periférica do sistema óptico.



É a única aberração que não está relacionada com a **desfocagem** da imagem.
Ela lida com a **ampliação** de objectos extensos.

Aberrações monocromáticas

Distorção

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

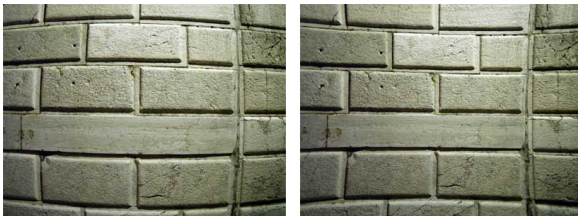
Avaliação qidd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

A **distorção em barril** resulta da redução da imagem devida a uma **lente negativa** ser maior na periferia do que no centro da lente.



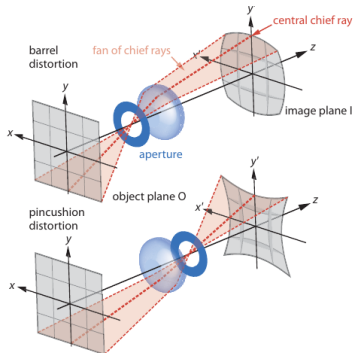
<https://www.techtudo.com.br/artigos/noticia/2012/02/aberracoes-fotograficas-e-como-contorna-las.html>

A **distorção em almofada** resulta da ampliação da imagem devida a uma **lente positiva** ser maior na periferia do que no centro da lente.

Aberrações monocromáticas

Distorção

O mesmo efeito pode ser observado se considerarmos a formação da imagem de um objecto extenso, por uma lente. Colocando um diafragma à frente ou atrás da lente, a posição de cada ponto imagem é determinada pelo **raio principal** que passa pelo centro da abertura:



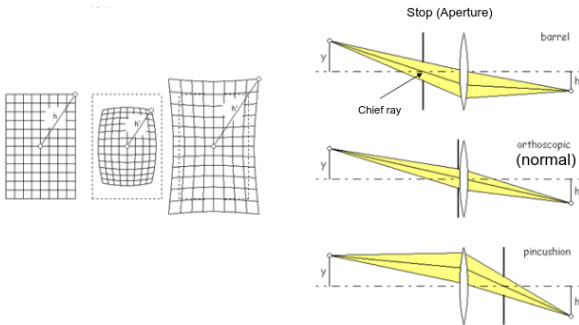
Distorção em barril

Distorção em almofada

Aberrações monocromáticas

Distorção

- Se o diafragma estiver em contacto com a lente, o raio principal atravessa-a sem sofrer qualquer desvio e não existe distorção — **sistema ortoscópico**.



<https://player.slideplayer.com/24/6966872/#>

- Se o diafragma se situar entre a lente e o plano objecto, o raio principal passa pela periferia da lente e o tamanho da imagem diminui mais à medida que se afasta do eixo óptico — **distorção em barril**.
- Se o diafragma se situar entre a lente e o plano imagem, o tamanho da imagem aumenta à medida que se afasta do eixo óptico — **distorção em almofada**.

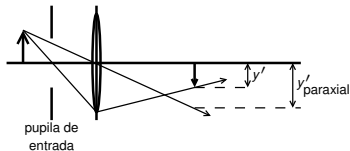
Distorção

Critério de resolução

Aberrometria

Funções transfer.

Liou-Brennan


$$E\% = \frac{y' - y'_{\text{paraxial}}}{y'_{\text{paraxial}}} \times 100\%$$

(distância percentual no plano imagem paraxial, entre o raio principal marginal e o paraxial)

Aberrações monocromáticas

Correcção da distorção — sistema ortoscópico

Correcção da distorção:

- a colocação da pupila de entrada de um lado ou do outro da lente, faz com que a distorção assuma o sinal contrário.



A utilização de diafragmas entre grupos de elementos ópticos pode fazer com que a distorção de uns cancele a distorção dos outros.



Um sistema corrigido de distorção denomina-se **ortoscópico**.

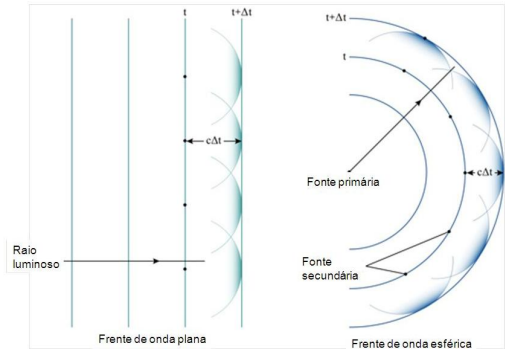
Ondas e raios de luz

Princípio de Huygens

Até agora, temos vindo a falar de **aberrações geométricas**:
incapacidade de os raios se encontrarem no mesmo ponto.



Mas, até já sabemos que cada ponto do plano objecto se comporta
como uma fonte de ondas esféricas — **princípio de Huygens**.



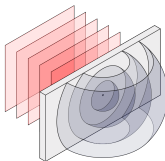
Ondas e raios de luz

Frentes de onda x Raios luminosos

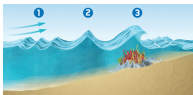
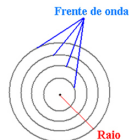
Tratar a luz como um conjunto de raios perpendiculares à **frente de onda** e com a mesma direcção de propagação desta, pode ser conveniente mas nem sempre é eficaz.



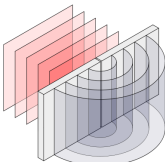
<https://www.mainstreetlaunch.org/the-racial-wealth-gap/>



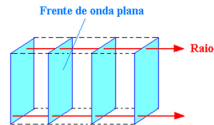
http://www.wikiwand.com/en/Absorptions_of_the_eye



<https://scienceworld.scholastic.com/issues/2017-18/051418/making-waves.html#1090L>



<https://physics.stackexchange.com/questions/71873/diffraction-and-waves>

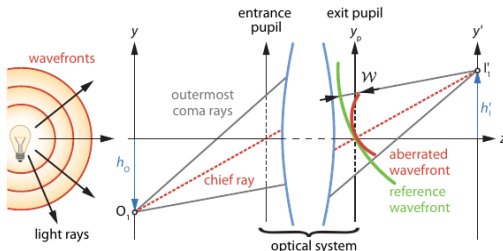


<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/frente-onda-raio-onda.htm>

Frente de onda

Aberrações de frente de onda e aberrações de Seidel

Parte desta frente de onda penetra na pupila de entrada e entra no sistema óptico.



Kaschke, M., Donnerhacke, K.-H., Stefan Rill, M., Optical Devices in Ophthalmology and Optometry: Technology, Design Principles, and Clinical Applications. Wiley-VCH, 2014.

- Se o sistema óptico fosse perfeito, conduziria essa frente de onda esférica até à pupila de saída e formaria um ponto conjugado no plano da imagem.

Frente de onda

Aberrações de frente de onda e aberrações de Seidel

- Quem trabalha em *cálculo de sistemas ópticos*, usa predominantemente a abordagem das **aberrações de Seidel**;
- quem trabalha em *interferometria*, utiliza a abordagem da **frente de onda**.

A maneira em que a frente de onda emergente se afasta da de entrada, pode ser quantificada através dos chamados **polinómios de Zernike**.

TABLE 15-1. ZERNIKE POLYNOMIALS AND THEIR SEIDEL ABERRATION EQUIVALENTS

Zernike Polynomial*	Seidel Aberration
Second order	Ametropia (defocus and astigmatism)
Third order	Coma and other aberrations
Fourth order	Spherical and other aberrations
Fifth to tenth orders	Irregular aberrations**

* Data from Liang and Williams (1997).

** Irregular aberrations are not present in spherical surfaces.

Frente de onda

Polinômios de Zernike

Img. retiniana

- Óptica x retiniana
- Ametrop. corrigidas
- Ametrop. n corrigidas
- Furo estenopeico
- Difracção
- Crítério de resolução

Aberrações

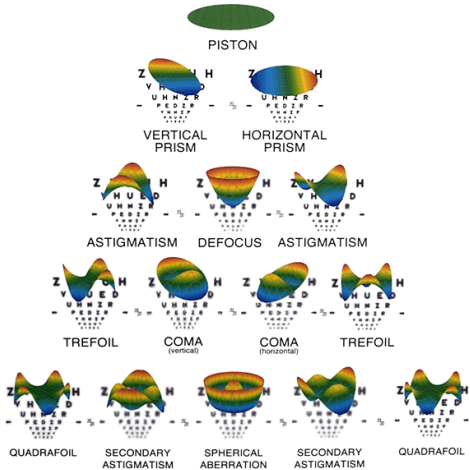
- A. cromáticas
- A. monocromáticas
- Aberrometria

Avaliação qldd.

- Diagramas de pontos
- Funções transfer.

Model. finitos

- Navarro
- Liou-Brennan



Frente de onda

Aberrometria

As aberrações monocromáticas do olho humano podem ser medidas utilizando **aberrómetros**:

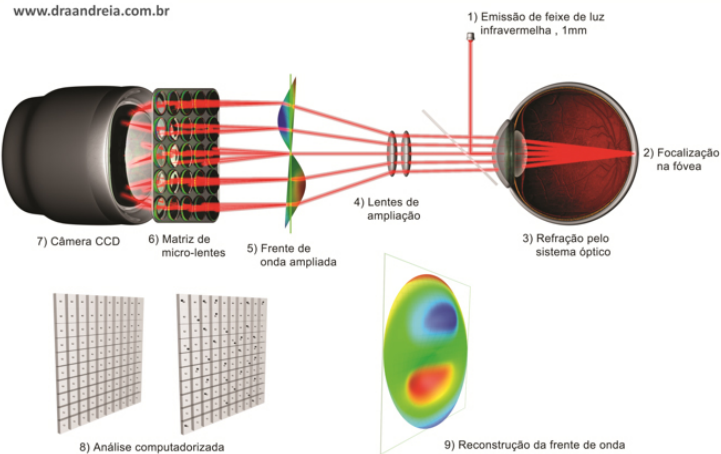
- um ponto luminoso é focado sobre a retina;
- a retina funciona como espelho côncavo e devolve a imagem desse ponto que tem de passar novamente pelos meios oculares;
- o padrão formado revela as aberrações monocromáticas do olho.

Utilidade:

- com as aberrações corrigidas, a AV pode melhorar;
- a observação do fundo do olho torna-se mais clara.

Frente de onda

Aberrometria



Frente de onda

Aberrometria

Quando a pupila é maior que 3 mm, as aberrações podem interferir com a capacidade de percepção do detalhe.

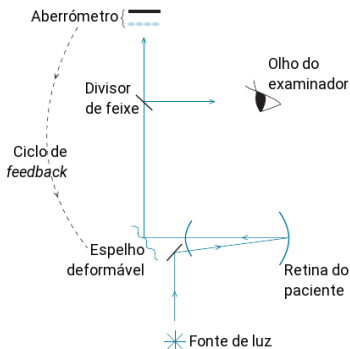


A compensação das aberrações pode melhorar a **sensibilidade ao contraste** e a **resolução**.

Frente de onda

Óptica adaptativa

A correcção das aberrações monocromáticas do olho humano pode ser feita em laboratório utilizando técnicas de **óptica adaptativa**:



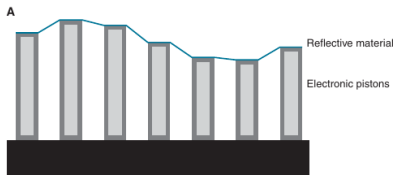
- utiliza-se um **espelho deformável** que permite adaptar a topografia da sua superfície, compensando as aberrações em cada momento.

Schwartz, S., Geometrical and Visual Optics: A Clinical Introduction. 3rd. Ed., McGrawHill, 2019.

Frente de onda

Óptica adaptativa

Cada pequena secção do espelho é controlada independentemente e ajustada de modo a permitir alterar a topografia do espelho e, assim, compensar a distorção da frente de onda.



Richard Feynman

in the Feynman Lectures on Physics

“Geometrical optics is either very simple or else it is very complicated.”

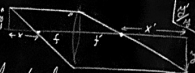
Summary Lecture 28. Geom. Optics

For rays near axis, spherical surfaces form images as follows:

One surface, $\frac{1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{1}{f}$ $\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}$

Start at $s=f$ (focus) makes rays \parallel to axis in image space ($s'=\infty$)
 Start \parallel to axis ($s=\infty$) rays converge at other focus $s'=f'$: $\frac{f'}{n} = f$.

Thin lens, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$ or $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$



General system: Find image in 1st surface (or lens) + use as object for next surface, etc.

$\frac{y'}{n} = \frac{f}{X} = \frac{X'}{f}$

http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_27.html

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qldd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

1

Imagem retiniana

Imagem óptica e imagem retiniana
Imagem retiniana em ametropias corrigidas
Imagem retiniana em ametropias não corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critérios de resolução

2

Aberrações do olho

Aberrações cromáticas
Aberrações monocromáticas
Aberrometria

3

Métricas de qualidade da imagem

Diagramas de pontos
Funções de transferência

4

Modelos esquemáticos do olho finitos

Modelo do olho de Navarro
Modelo do olho de Liou-Brennan

Qualidade óptica da imagem no olho ametrope

Outra vez...

O **olho míope**, por ter o seu PR mais próximo de si, acomoda menos, e sofre também menos de todas as aberrações associadas ao aumento de potência do cristalino e à difracção no cristalino acomodado.



Por seu lado, o **olho hipermetrope**, ao estar sempre a acomodar, mesmo para a distância de longe, vai sofrer constantemente dos efeitos das aberrações e da difracção.

Métricas de qualidade da imagem

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

A medição precisa das aberrações do olho humano tem-se vindo a verificar difícil:

- por causa do **elevado grau de aberrações** presentes;
- por não percebermos bem como faz o cérebro para converter as imagens retinianas em **percepções visuais**.

Métricas de qualidade da imagem

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difração
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

O estudo da óptica visual requer a definição de **métricas comuns** que permitam especificar as imperfeições ópticas dos olhos.



As recomendações da OSA (*Optical Society of America*) para descrever as aberrações do olho de forma uniforme e consensual, incluem a definição de :

- eixos de referência;
- funções descritivas;
- modelos do olho.

Contribuição para a limitação da AV

Img. retiniana

- Óptica x retiniana
- Ametrop. corrigidas
- Ametrop. n corrigidas
- Furo estenopeico
- Difração
- Crítério de resolução

Aberrações

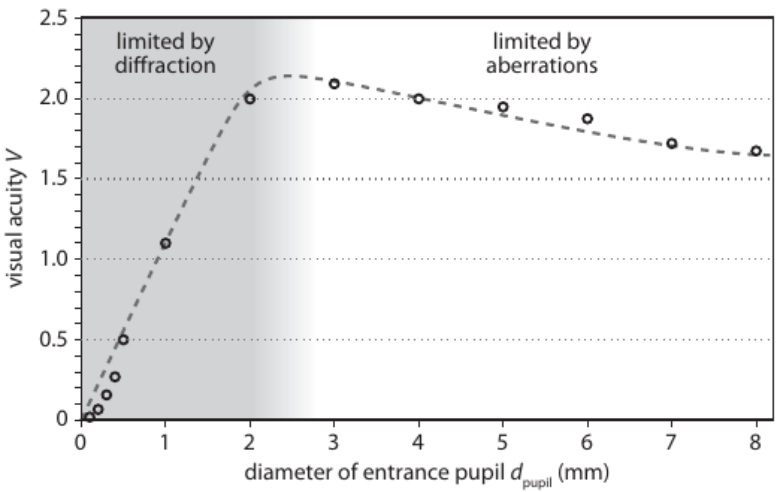
- A. cromáticas
- A. monocromáticas
- Aberrometria

Avaliação qldd.

- Diagramas de pontos
- Funções transfer.

Model. finitos

- Navarro
- Liou-Brennan



Contribuição para a limitação da AV

Img. retiniana

- Óptica x retiniana
- Ametrop. corrigidas
- Ametrop. n corrigidas
- Furo estenopeico
- Difração
- Crítério de resolução

Aberrações

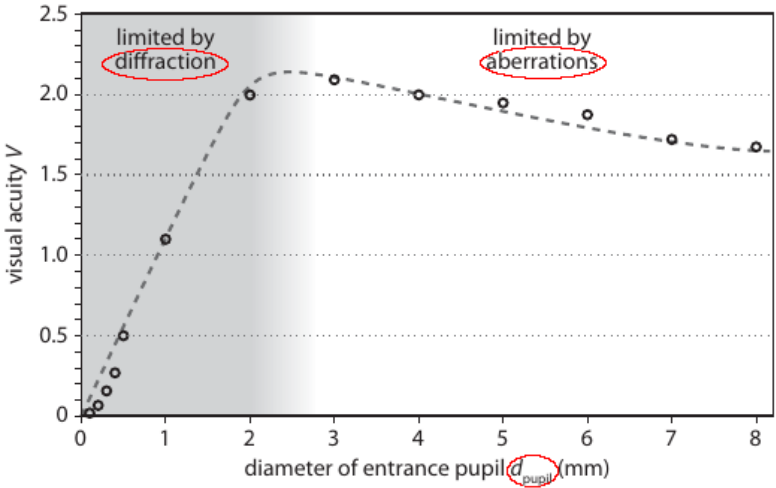
- A. cromáticas
- A. monocromáticas
- Aberrometria

Avaliação qidd.

- Diagramas de pontos
- Funções transfer.

Model. finitos

- Navarro
- Liou-Brennan



Métricas de qualidade da imagem

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

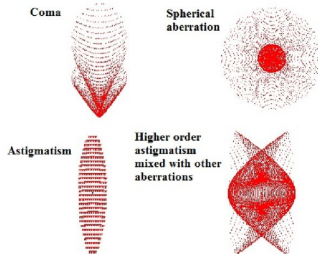
Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

- Diagramas de pontos
- Funções de transferência:
 - Resposta impulsional (PSF)
 - Função de transferência de modulação (FTM)
 - Função de transferência de fase (FTF)
 - Função de transferência óptica (FTO)

Diagramas de pontos

Diagrama de pontos → esquema que mostra onde é que os raios provenientes de um ponto objecto, incidem no plano imagem.



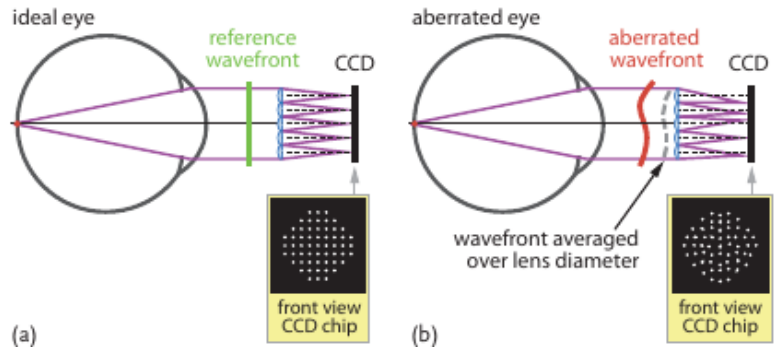
<https://www.researchgate.net/>

- Os diagramas de pontos são óptimos para visualização;
- mas podem tornar-se difíceis de interpretar se existirem várias aberrações presentes.

Diagramas de pontos

Aberrometria de raios emergentes

Utilização de diagramas de pontos para estudo da frente de onda detectada num **sensor de Hartmann-Shack**:

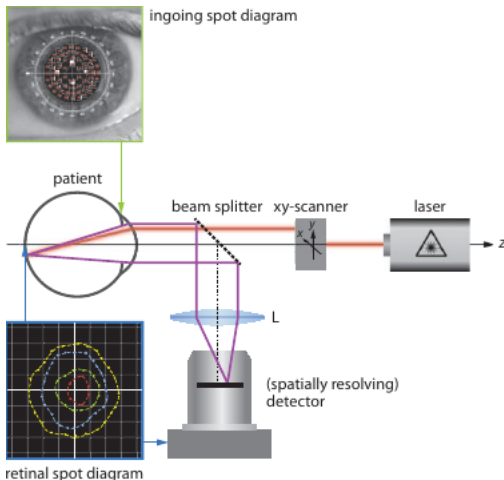


Kaschke,M., Donnerhacke,K-H., Stefan Rill,M. Optical Devices in Ophthalmology and Optometry: Technology, Design Principles, and Clinical Applications. Wiley-VCH, 2014.

Diagramas de pontos

Aberrometria de raios incidentes

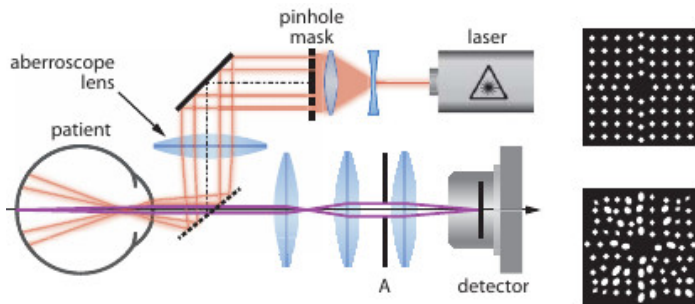
Utilização de diagramas de pontos num **aberrómetro de traçado de raios**:



Diagramas de pontos

Aberrometria de raios incidentes

Utilização de diagramas de pontos num **aberrómetro de Tscherning**:

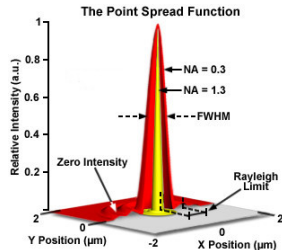
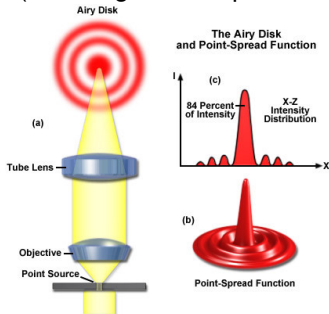


Resposta impulsional (PSF)

Point spread function = Função de espalhamento
de ponto

Resposta impulsional → descreve a distribuição da intensidade luminosa na retina, da imagem correspondente a um objecto pontual.

(é a imagem de 1 ponto dada pelo olho e formada na retina)



<http://zeiss-campus.magnet.fsu.edu/print/basics/psf-print.html>

<http://zeiss-campus.magnet.fsu.edu/print/basics/resolution-print.html>

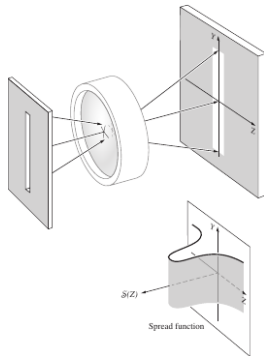
- A imagem de um ponto, não é um ponto mas sim uma mancha, devido a **aberrações e difracção**.

Resposta impulsional (PSF)

Point spread function = Função de espalhamento de ponto

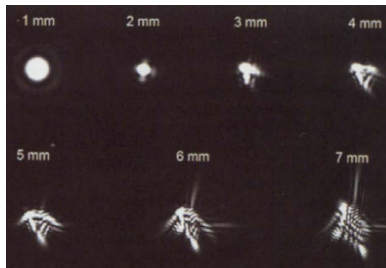
Se o **objecto for extenso**, pode ser tratado como um conjunto de fontes pontuais e independentes, cada uma produzindo a sua própria PSF. Estas PSF sobrepõem-se para formar a imagem do objecto.

Podemos também falar de **resposta impulsional de linha** (LSF), que descreve a distribuição da energia luminosa na imagem de uma fonte linear infinitesimal.



Point spread function = Função de espalhamento de ponto

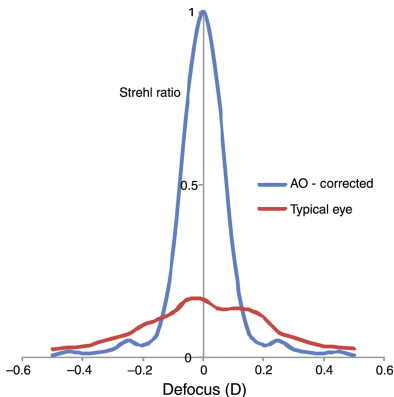
Para um sistema óptico com uma abertura circular e com aberrações a PSF assume formas características e degrada-se rapidamente com o aumento do diâmetro pupilar.



Razão de Strehl

Razão de Strehl → expressa o quociente entre a altura do pico da PSF e a altura do pico para o mesmo sistema óptico se ele apenas fosse limitado por difracção.

$$\mathcal{S} = \frac{I_{\max, \text{aberr}}}{I_{\max, \text{sem aberr}}}$$



Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

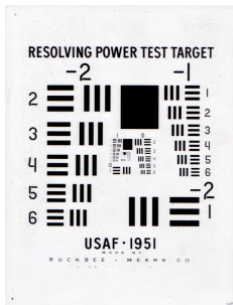
Raiz quadrada média da aberração

Raiz quadrada média da aberração → é uma medida da amplitude da aberração da onda. Pode ser obtida calculando a raiz quadrada da média dos quadrados dos valores de todas as aberrações (polinómios de Zernike).
Corresponde ao desvio padrão do erro da frente de onda.

Função de transferência de modulação (FTM)

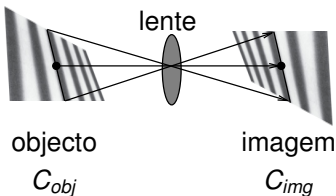
Função de transferência de modulação (FTM) → permite estudar para várias frequências espaciais, o contraste do objecto e da imagem.

$$C = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\max} + L_{\min}}$$



Função de transferência de modulação (FTM)

Para avaliar a qualidade com que uma lente (ou de qualquer sistema óptico) transmite a informação, vamos usar redes como objectos do sistema:



- medimos o contraste da rede objecto, C_{obj} ;
- medimos o contraste da rede imagem, C_{img} ;

 \Downarrow

Se a lente fosse perfeita

$$C_{img} = C_{obj}.$$

★

Na prática, existe sempre alguma degradação da imagem (as lentes não são perfeitas), logo,

$$C_{img} < C_{obj}.$$

A relação $\frac{C_{img}}{C_{obj}}$ indica a qualidade com que a lente consegue transmitir informação.

Efeito da desfocagem

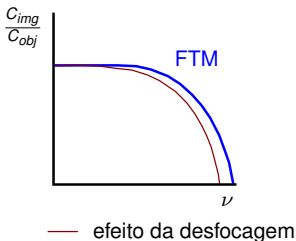
Pode ocorrer quando se analisa a
imagem fora do plano focal do
sistema óptico.

★

Por exemplo no caso de uma ametropia.

↓

Consequência: diminuição da qualidade da imagem a partir das altas frequências (com as baixas e médias pouco afectadas).



Lente translúcida

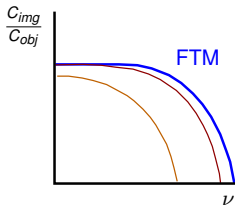
P.ex., filtros translúcidos
usados em ambliopia ou um
vidro esmerilado.



Consequência: a imagem é muito degradada em termos de contraste para todas as frequências espaciais.



Este efeito é devido à reflexão difusa na superfície irregular dos filtros / vidros esmerilados.

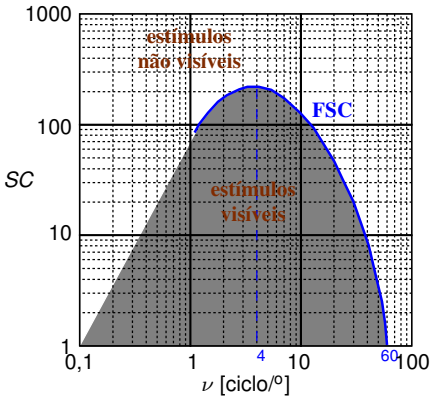
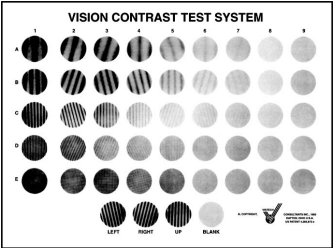


- efeito da desfocagem
- FTM de uma lente translúcida



Função de transferência de modulação (FTM)

Olho humano — Função de sensibilidade ao
contraste



Função de transferência de fase (FTF)

Função de transferência da fase → contabiliza variações de fase devidas a aberrações assimétricas como o coma ou o astigmatismo.



Quando as frequências espaciais de uma grelha são transferidas do plano objecto para o plano imagem, a localização das franjas claras e escuras pode também variar.

Função de transferência óptica (FTO)

Função de transferência óptica → função complexa cujo
módulo é a FTM e a fase é a FTF.

$$FTP = FTM e^{iFTF}$$

- A FTM mede variações de contraste;
- a FTF mede variações de fase.

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qldd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

1

Imagem retiniana

Imagem óptica e imagem retiniana
Imagem retiniana em ametropias corrigidas
Imagem retiniana em ametropias não corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critérios de resolução

2

Aberrações do olho

Aberrações cromáticas
Aberrações monocromáticas
Aberrometria

3

Métricas de qualidade da imagem

Diagramas de pontos
Funções de transferência

4

Modelos esquemáticos do olho finitos

Modelo do olho de Navarro
Modelo do olho de Liou-Brennan

Img. retiniana

Óptica x retiniana
Ametrop. corrigidas
Ametrop. n corrigidas
Furo estenopeico
Difracção
Critério de resolução

Aberrações

A. cromáticas
A. monocromáticas
Aberrometria

Avaliação qidd.

Diagramas de pontos
Funções transfer.

Model. finitos

Navarro
Liou-Brennan

Modelos esquemáticos do olho finitos

Modelos esquemáticos do olho finitos:

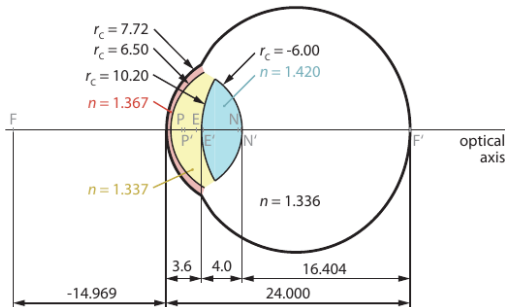
Permitem descrever a imagem formada pelo olho humano para raios não paraxiais e objectos situados fora do eixo.

A. cromáticas

Diagramas de pontos

Navarro

As superfícies refractoras do olho são representadas por 4 superfícies esféricas centradas num eixo óptico comum.



Cada superfície é descrita por: $x^2 + y^2 + (1 + Q)z^2 - r_C z = 0$,
onde:

r_C — raio de curvatura;

Q — parâmetro de asfericidade;

z — direcção do eixo óptico.

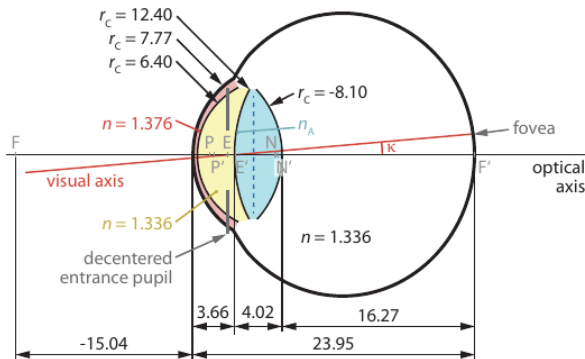
Modelo do olho de Navarro

Parameter	Relaxed vision (A = 0 D)	Accommodated vision (A = 10 D)
Location of object-side focal point F (mm)	-14.969	-12.051
Location of image-side focal point F' (mm)	24.004	21.172
Location of object-side nodal point N (mm)	7.145	6.727
Location of image-side nodal point N' (mm)	7.452	7.116
Location of object-side principal point P (mm)	1.583	2.005
Location of image-side principal point P' (mm)	1.890	2.393
Location of entrance pupil E (mm)	3.042	2.928
Location of exit pupil E' (mm)	3.682	3.551
Refractive power of cornea (D)	42.882	42.882
Refractive power of lens (D)	21.779	34.548
Refractive power of eye (D)	60.416	71.145
Total eye length (mm)	24.004	24.000

	r_C (mm)	L (mm)	n	Q
Corneal front surface	7.72	-	-	-
Cornea	-	0.55	1.3670	-0.2600
Corneal back surface	6.50	-	-	-
Anterior chamber	-	$3.05 - L_2$	1.3374	0
Front surface of eye lens	$10.20 - r_{C3}$	-	-	-
Eye lens	-	$4.00 + L_3$	$1.4200 + n_3$	$-3.1316 - Q_3$
Back surface of eye lens	$-6.00 + r_{C4}$	-	-	-
Vitreous	-	16.403 98	1.3360	$-1.000 - Q_4$

Modelo do olho de Liou-Brennan

Os parâmetros ópticos e geométricos são baseados em medições efectuadas em pacientes reais com cerca de 45 anos. Este modelo é muito usado para prever o desempenho visual antes e depois de cirurgias refractivas.



Modelo do olho de Liou-Brennan

- Leva em conta o **descentramento** de um olho humano real: *eixo visual* faz um ângulo $\kappa = 5^\circ$ com o *eixo óptico*;
- a íris é considerada como uma abertura circular situada em frente da superfície anterior do cristalino e descentrada 0,5 mm do eixo óptico, no sentido nasal;
- a *acomodação* não é tida em conta;
- a **dispersão** nos meios oculares é considerada semelhante à da água:
$$\delta_{\text{água}} \approx 1,3847 - 0,1455 \mu\text{m}^{-1} \cdot \lambda + 0,0961 \mu\text{m}^{-2} \cdot \lambda^2$$

(onde $\lambda[\mu\text{m}]$ é o c.d.o. da luz);
- as superfícies da córnea e do cristalino são **asféricas**;
- o cristalino tem **índice de refração variável**.

Img. retiniana

- Óptica x retiniana
- Ametrop. corrigidas
- Ametrop. n corrigidas
- Furo estenopeico
- Difracção
- Crítério de resolução

Aberrações

- A. cromáticas
- A. monocromáticas
- Aberrometria

Avaliação qlidd.

- Diagramas de pontos
- Funções transfer.

Model. finitos

- Navarro
- Liou-Brennan

Modelo do olho de Liou-Brennan

Parameter	Relaxed Vision
Location of object-side focal point F (mm)	-15.040
Location of image-side focal point F' (mm)	23.950
Location of object-side nodal point N (mm)	7.100
Location of image-side nodal point N' (mm)	7.378
Location of object-side principal point P (mm)	1.532
Location of image-side principal point P' (mm)	1.890
Location of entrance pupil E (mm)	3.098
Location of exit pupil E' (mm)	3.720
Refractive power of cornea (D)	42.262
Refractive power of lens (D)	22.134
Refractive power of eye (D)	60.314
Total eye length (mm)	23.950

	r_c (mm)	L (mm)	n	Q
Corneal front surface	7.77	-	-	-
Cornea	-	0.50	1.376	-0.18
Corneal back surface	6.40	-	-	-
Anterior chamber	-	3.16	1.336	-0.60
Front surface of eye lens	12.40	-	-	-
Eye lens (front segment)	-	1.59	n_A	-0.94
Lens center (dashed line Figure 2.15)	∞	2.43	n_P	-
Back surface of eye lens	-8.10	-	-	-
Vitreous	-	16.27	1.336	0.96

Índice de refração na
superfície anterior do
cristalino: $n_A(\rho, z) =$
 $1,368 + 0,049057 \mu\text{m}^{-1} z -$
 $0,015427 \mu\text{m}^{-2} z^2 -$
 $0,001978 \mu\text{m}^{-2} \rho^2$
onde $\rho[\mu\text{m}] = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a
coordenada normal à
direcção de propagação da
luz, z .



Índice de refração na no
centro do cristalino:
 $n_P(\rho, z) =$
 $1,407 - 0,006605 \mu\text{m}^{-2} z^2 -$
 $0,001978 \mu\text{m}^{-2} \rho^2$



$z, \rho[\mu\text{m}]$