

# Óptica

## Geométrica Ocular



*Universidade da Beira Interior*

*Departamento de Física*

Mário Pereira

Covilhã – 2008



## Índice

<b>Prefácio.....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1: Óptica Geométrica .....</b>	<b>10</b>
<b>1.1 Introdução.....</b>	<b>10</b>
<b>1.2 A Propagação da Luz.....</b>	<b>11</b>
1.2.1 Transmissão e índice de refração.....	11
1.2.2 Reflexão .....	12
1.2.3 A lei da reflexão.....	13
1.2.4 Refracção .....	15
<b>1.3 O Princípio de Huyghens .....</b>	<b>16</b>
<b>1.4 O Princípio de Fermat .....</b>	<b>20</b>
<b>1.5 O Princípio da Reversibilidade .....</b>	<b>22</b>
<b>1.6 Reflexão em Espelhos Planos.....</b>	<b>22</b>
<b>1.7 Reflexão em Superfícies Esféricas.....</b>	<b>24</b>
1.7.1 Exemplos de convenções de sinais.....	25
1.7.2 Símbolos.....	27
1.7.3 Equação dos espelhos.....	27
1.7.4 Pontos focais de superfícies de reflexão esféricas.....	29
1.7.5 Formação da imagem em espelhos esféricos.....	31
1.7.6 Curvatura e Vergência.....	33
<b>1.8 Refracção em Superfícies Esféricas .....</b>	<b>35</b>
1.8.1 Introdução: convenção de sinais e símbolos .....	35
1.8.2 A Equação das Superfícies de Refracção .....	35
1.8.3 Formação da imagem em dióptros esféricos .....	38
1.8.4 Vergências na Refracção .....	39
<b>1.9 Lentes Finas .....</b>	<b>40</b>
1.9.1 Sistemas de lentes finas.....	45
1.9.2 Vergências para lentes finas.....	46
1.9.3 Equação Newtoniana para lentes finas .....	47
<b>Capítulo 2: Superfícies Ópticas não Esféricas.....</b>	<b>49</b>
<b>2.1 Introdução.....</b>	<b>49</b>
<b>2.2 Superfícies toroidais e cilíndricas.....</b>	<b>50</b>
<b>2.3 Lentes oftálmicas .....</b>	<b>53</b>
2.3.1 Lentes cilíndricas .....	54
2.3.2 Lentes esfero-cilíndricas .....	57
2.3.3 Lentes bicilíndricas .....	60
2.3.4 Outros tipos de lentes .....	63

<b>Capítulo 3: O Sistema Óptico do olho .....</b>	<b>65</b>
<b>3.1 Introdução.....</b>	<b>65</b>
<b>3.2 A Córnea .....</b>	<b>71</b>
<b>3.3 Câmara anterior .....</b>	<b>72</b>
<b>3.4 A íris e a pupila.....</b>	<b>72</b>
<b>3.5 O Cristalino.....</b>	<b>72</b>
<b>3.6 A retina.....</b>	<b>74</b>
<b>3.7 O olho esquemático .....</b>	<b>75</b>
3.7.1 Centro óptico.....	75
3.7.2 Pupilas de entrada e de saída.....	76
3.7.3 O eixo visual .....	77
<b>3.8 O campo de visão.....</b>	<b>77</b>
<b>3.9 O olho reduzido .....</b>	<b>79</b>
<b>3.10 A imagem retiniana .....</b>	<b>80</b>
 <b>Capítulo 4: O Olho Esquemático.....</b>	 <b>82</b>
<b>4.1 Introdução.....</b>	<b>82</b>
<b>4.2 A córnea .....</b>	<b>83</b>
<b>4.3 O cristalino.....</b>	<b>84</b>
<b>4.4 O olho esquemático de Gullstrand – Emsley .....</b>	<b>85</b>
4.4.1 Dados gerais.....	85
4.4.2 Cálculo de constantes ópticas.....	85
<b>4.5 O olho esquemático acomodado.....</b>	<b>87</b>
<b>4.6 Relações paraxiais .....</b>	<b>89</b>
<b>4.7 As imagens de Purkinje .....</b>	<b>89</b>
4.7.1 Considerações teóricas .....	89
4.7.2 Dimensões e propriedades.....	90
4.7.3 Centragem óptica do olho .....	92
 <b>Capítulo 5: Acuidade Visual.....</b>	 <b>94</b>
<b>5.1 Introdução.....</b>	<b>94</b>
<b>5.2 Discriminação de linhas .....</b>	<b>95</b>
<b>5.3 Resolução.....</b>	<b>96</b>
5.3.1 Teoria dos receptores .....	96
5.3.2 Teoria ondulatória .....	97
5.3.3 Resolução de uma rede e acuidade.....	98

5.3.4	Resolução e tamanho da pupila .....	99
5.3.5	Resolução e iluminação.....	99
<b>5.4</b>	<b>Visão e acuidade visual em prática clínica .....</b>	<b>100</b>
5.4.1	Introdução .....	100
5.4.2	Distância para cartas de testes e acuidade .....	101
5.4.3	Variação no estilo das letras e legibilidade .....	102
<b>5.5</b>	<b>Visão através de instrumentos ópticos.....</b>	<b>103</b>
5.5.1	Visão com telescópios e prismas binoculares .....	103
5.5.2	Visão com microscópios .....	104
<b>Capítulo 6: Ametropias Esféricas .....</b>		<b>105</b>
<b>6.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>105</b>
6.1.1	Miopia .....	105
6.1.2	Hipermetropia .....	106
6.1.3	Refracção Ocular.....	107
6.1.4	Ametropias axiais e refractivas .....	108
6.1.5	Lente de Correção .....	109
6.1.6	Refracção no Ponto dos Óculos.....	109
6.1.7	Mudança da Distância Vertex .....	111
6.1.8	Hipermetropia e acomodação .....	111
6.1.9	Afaquia.....	112
6.1.10	Imagem retiniana em ametropias corrigidas .....	113
6.1.11	Visão em ametropias esféricas.....	113
<b>Capítulo 7: Astigmatismo .....</b>		<b>115</b>
<b>7.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>115</b>
<b>7.2</b>	<b>Notação axial.....</b>	<b>116</b>
<b>7.3</b>	<b>Formação da imagem no olho astigmático .....</b>	<b>116</b>
<b>7.4</b>	<b>Classificação do astigmatismo .....</b>	<b>120</b>
<b>7.5</b>	<b>Lentes correctoras para longe .....</b>	<b>121</b>
<b>7.6</b>	<b>Visão em astigmatismo não corrigido.....</b>	<b>124</b>
7.6.1	Quantidade de astigmatismo .....	124
7.6.2	Tipos de astigmatismo.....	124
7.6.3	Direcção do eixo .....	125
<b>Capítulo 8: Acomodação e Visão Próxima.....</b>		<b>128</b>
<b>8.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>128</b>
<b>8.2</b>	<b>Acomodação ocular e nos óculos .....</b>	<b>131</b>
<b>8.3</b>	<b>Adição ao perto .....</b>	<b>134</b>

<b>Capítulo 9: Convergência .....</b>	<b>137</b>
<b>9.1 Introdução.....</b>	<b>137</b>
<b>9.2 Posições de repouso e de fixação .....</b>	<b>138</b>
9.2.1 Posição anatómica de repouso.....	138
9.2.2 Posição fisiológica de repouso .....	138
<b>9.3 Ponto próximo de convergência .....</b>	<b>139</b>
<b>9.4 Unidades de convergência.....</b>	<b>140</b>
<b>9.5 Convergência, acomodação e erro refractivo.....</b>	<b>141</b>
9.5.1 Emetropia .....	141
9.5.2 Ametropia não corrigida.....	142
9.5.3 Emetropia com correcção para perto .....	142
9.5.4 Ametropia corrigida com óculos .....	143
9.5.5 Ametropia corrigida com lentes de contacto .....	144
 <b>Capítulo 10: Apêndices .....</b>	 <b>146</b>
<b>Apêndice 1.....</b>	<b>146</b>
<b>10.1 “Óptica” – Eugene Hecht, Fundação Calouste Gulbenkian.....</b>	<b>146</b>
10.1.1 Convenção de sinais.....	146
10.1.2 Dióptros esféricos .....	147
10.1.3 Lentes delgadas.....	148
10.1.4 Espelhos esféricos.....	152
<b>Apêndice 2.....</b>	<b>153</b>
<b>10.2 “Introduction to Optics” – L. Pedrotti e F. Pedrotti, Prentice Hall.</b>	<b>153</b>
10.2.1 Convenção de sinais.....	153
10.2.2 Espelhos esféricos.....	154
10.2.3 Superfícies de refração esféricas .....	155
10.2.4 Lentes esféricas .....	155
<b>Apêndice 3.....</b>	<b>157</b>
<b>10.3 “Optics” – M. Freeman, Butterworths. ....</b>	<b>157</b>
10.3.1 Convenção de sinais.....	157
10.3.2 Espelhos esféricos.....	158
10.3.3 Superfícies de refração esféricas .....	158
10.3.4 Lentes esféricas .....	159
<b>Apêndice 4.....</b>	<b>161</b>
<b>10.4 “Física IV” – Halliday, Resnick and Krane .....</b>	<b>161</b>
10.4.1 Convenção de sinais.....	161
10.4.2 Espelhos esféricos.....	162
10.4.3 Superfícies de refração esféricas .....	163
10.4.4 Lentes esféricas finas .....	163

<b>Apêndice 5.....</b>	<b>165</b>
<b>10.5 “Física” – Alonso e Finn, Addison Wesley .....</b>	<b>165</b>
10.5.1 Convenção de sinais.....	165
10.5.2 Espelhos esféricos.....	165
10.5.3 Superfícies de refração esféricas .....	167
10.5.4 Lentes esféricas.....	168
 <b>Bibliografia.....</b>	 <b>170</b>

## Prefácio

A óptica está relacionada com o estudo da luz e dos fenómenos associados com a sua generalização, transmissão e detecção. Num sentido mais lato, a óptica inclui todos os fenómenos associados com as radiações infravermelhas e ultravioletas. A óptica geométrica considera que a luz se propaga rectilaneamente, e está relacionada com as leis que controlam a reflexão e a refacção dos raios luminosos. A óptica física trata dos fenómenos que dependem da natureza ondulatória da luz, por exemplo a difracção, a interferência e a polarização (in dicionário de Física).

A óptica é uma área em grande expansão com aplicações em física, engenharia e tecnologia. A emergência dos lasers, das fibras ópticas, da óptica não linear e de uma grande variedade de fontes semicondutoras e detectores fez com que as aplicações da óptica se estendessem a todos os ramos da ciência.

A luz (radiação electromagnética) é a base da óptica. Sem luz não existiria óptica. Mas o que é a luz? Qual a sua natureza? A evolução do nosso entendimento sobre a natureza da luz é uma das narrações mais fascinantes da história da ciência. Nos primórdios da ciência moderna, séculos XVI e XVII, a luz era descrita ou como partículas ou como ondas. Sendo modelos incompatíveis, cada um deles gozou de um período de proeminência na comunidade científica. No século XIX tornou-se claro que de alguma forma a luz era ao mesmo tempo onda e partícula. Durante algum tempo este estado perplexo, denominado de dualidade onda-partícula, motivou os cientistas a encontrar uma solução para estes modelos da luz aparentemente contraditórios. Num certo sentido a solução foi encontrada através da criação da electrodinâmica quântica, contudo muitos cientistas concordam que o perfeito entendimento da natureza da luz é de alguma forma mais complexo.

A luz pode ser representada fundamentalmente de duas formas, através da teoria corpuscular ou através da teoria ondulatória. A forma mais simples de representar a luz resulta da teoria corpuscular, segundo a qual a luz é representada através de raios luminosos rectilíneos (domínio da óptica geométrica). No entanto, quando não se pode desprezar o comprimento de onda da luz, por este ser de dimensões comparáveis às dimensões do sistema, é necessário ter em conta a natureza ondulatória da luz passando esta a ser representada através de ondas. Este é o domínio da óptica física.

A característica essencial de uma onda é a sua não localização. Do ponto de vista clássico a propagação de uma onda através de um meio consiste numa perturbação  $\psi$  que se propaga nesse meio transportando energia e momento. As ondas mais familiares e de mais fácil visualização são as ondas mecânicas, nomeadamente as ondas em cordas, as ondas superficiais em líquidos, as ondas em molas e as ondas sonoras no ar. As ondas sonoras são longitudinais, isto é, o meio sofre uma perturbação na direcção de propagação da onda, enquanto que as ondas em cordas são transversais, nas quais a perturbação sofrida pelo meio se realiza numa direcção perpendicular à direcção de propagação da onda. Existem então dois tipos de ondas, as ondas longitudinais e as ondas transversais.

Para ambos os casos, embora a energia transportada pela onda se propague com a onda, o meio material onde a onda se propaga permanece na sua região de equilíbrio. Para as ondas não existe transporte de meio material. Esta característica das ondas distingue-as claramente de um fluxo de partículas.



A propagação de uma onda num meio é descrita matematicamente através de uma equação diferencial, que é função da posição e do tempo e que se denomina de equação de onda. A forma mais geral da equação de onda a uma dimensão, é obtida a partir da condição de que qualquer solução da equação de onda tem de se propagar numa dada direcção, com velocidade constante, sem variação da sua forma ao longo do tempo relativamente a um sistema de eixos que se desloque com a mesma velocidade.

Assim, uma onda que se propaga segundo a direcção do eixo dos  $xx$ , no sentido positivo ou negativo, é descrita através da equação

$$\psi(x, t) = f(x \mp vt)$$

onde  $f$  representa uma função diferenciável e onde  $t$ ,  $x$  e  $v$  representam o tempo, a direcção e a velocidade de propagação da onda respectivamente, indicando o sinal negativo que a onda se desloca no sentido positivo do eixo dos  $xx$  enquanto que o sinal positivo indica a situação oposta.

A equação de onda diferencial a uma dimensão é dada pela equação

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

A forma de onda mais simples é aquela cujo perfil é uma curva seno ou cosseno, conhecidas como ondas harmónicas, sendo dada pela equação

$$\psi = A \sin[k(x \mp vt) + \varepsilon],$$

onde  $A$  e  $k$  são constantes representando a amplitude e a constante de propagação da onda, podendo variar sem que provoquem alteração no carácter harmónico da onda.  $\varepsilon$  é a fase inicial da onda. Ao argumento da função seno chama-se fase da onda e representa-se por  $\phi$ .

As ondas em seno ou cosseno são periódicas, representando pulsos regulares que se repetem infinitamente. A única diferença que existe entre a utilização de um função seno ou de uma função cosseno na representação da forma de uma onda reside no facto de uma estar adiantada ou atrasada relativamente à outra de  $\pi/2$  radianos ( $90^\circ$ ). Devido à sua periodicidade, a forma de uma onda repete-se sempre que exista um desvio de um múltiplo inteiro do comprimento de onda ( $\lambda$ ) em todos os seus pontos. Matematicamente esta situação pode ser expressa através da seguinte equação

$$\psi = A \sin\{k[(x + \lambda) - vt] + \varepsilon\},$$

onde  $\lambda$  representa o comprimento de onda ou o período espacial. A relação entre o comprimento de onda e a constante de propagação é dada através da seguinte equação:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Alternativamente, se a onda for observada para uma posição fixa, ela repete-se sempre que exista uma diferença no tempo de um múltiplo do período temporal  $T$  para todos os pontos. Neste caso a equação para a onda é dada por

$$\psi = A \sin\{k[x - v(t + T)] + \varepsilon\}$$

obtendo-se assim uma relação para a velocidade de propagação da onda em função do comprimento de onda, dada por:

$$v = \lambda \nu,$$

sendo  $\nu = 1/T$  a frequência temporal da onda. Outras quantidades muito utilizadas no movimento ondulatório são a frequência angular temporal ( $\omega$ ) dada pela equação  $\omega = 2\pi\nu$  e o número de onda ( $\kappa$ ), dado pela equação  $\kappa = 1/\lambda$ . Todas as quantidades que foram mencionadas são igualmente aplicáveis a ondas não harmónicas mas periódicas.

Utilizando as definições anteriores pode exprimir-se uma onda harmónica, a propagar-se num dado meio, através das equações:

$$\psi = A \sin[k(x \mp vt) + \varepsilon]$$

$$\psi = A \sin[(kx \mp \omega t) + \varepsilon]$$

que são as mais utilizadas na representação de uma onda. Estas ondas são ondas ideais variando de  $-\infty$  até  $+\infty$  com uma única frequência constante, portanto com um único comprimento de onda, ou seja monocromáticas. Na prática não se verifica isto, as ondas reais não são monocromáticas sendo compostas por mais do que um comprimento de onda.

A velocidade de fase de uma onda é dada pela razão entre a frequência angular e a constante de propagação. Qualquer ponto de uma onda harmónica cuja amplitude seja constante move-se para que a fase se mantenha constante no tempo. É o que acontece no caso das ondas circulares geradas na superfície de um líquido, para as quais os círculos concêntricos representam curvas onde a fase se mantém constante no tempo, para todos os seus pontos.

No caso de existirem duas funções de onda  $\psi_1$  e  $\psi_2$  que sejam ambas soluções da equação de onda, a função de onda resultante da adição dessas duas funções de onda é também solução da equação de onda. Este facto é conhecido como princípio da sobreposição e significa que quando duas perturbações individuais atingem um mesmo ponto do espaço elas sobrepõem-se, adicionando-se ou subtraindo-se uma à outra, sem que o seu movimento seja afectado. Para duas funções de onda com amplitudes semelhantes o resultado da sobreposição variará, dependendo da diferença de fase entre

elas, entre um valor máximo no caso de as duas funções de onda estarem em fase e um valor mínimo para a situação de oposição de fase. Este fenómeno é chamado de interferência.

Até aqui só foram referenciadas as funções de onda unidimensionais. No entanto a situação mais geral é a existência de ondas tridimensionais definidas por uma equação de onda também tridimensional que é função de  $x$ ,  $y$ , e  $z$  (em coordenadas rectangulares). A equação de onda tridimensional é uma generalização da equação 4-2 a uma dimensão e é dada por:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

onde  $\nabla$  representa o operador Laplaciano. As ondas tridimensionais podem ser divididas em três grupos principais: as ondas planas, as ondas esféricas e as ondas cilíndricas. As ondas planas são o caso mais simples de uma onda tridimensional. Existem quando todas as superfícies, onde a perturbação apresenta fase constante, formam um conjunto de planos perpendiculares à direcção de propagação (ver figura 4-1(a)). Os feixes de luz laser colimados são um exemplo de uma frente de onda plana a propagar-se no espaço. A expressão matemática para uma onda plana perpendicular a um dado vector  $\vec{k}$  (vector de propagação), que passa por um ponto genérico  $r$  de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ , é  $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$ . Assim, a função de onda para uma onda plana harmónica a propagar-se no espaço é dada por

$$\psi(r, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon)}$$

onde  $A$ ,  $\omega$  e  $k$  são constantes, que conforme já foi referido representam a amplitude, a frequência angular e a constante de propagação da onda, respectivamente. À medida que esta perturbação se propaga ao longo da direcção  $\vec{k}$ , possui para cada ponto do espaço e do tempo uma dada fase. Para um dado tempo, as superfícies que unem todos os pontos de igual fase são conhecidas como frente de ondas. Se a amplitude  $A$  for constante em todos os pontos, a função de onda assumirá o mesmo valor em toda essa frente de onda. No caso mais geral como  $A$  é função da posição, a amplitude não é constante em toda a frente de onda e a onda deixa de ser homogénea.

A importância das ondas planas em óptica advém em primeiro lugar da facilidade com que se podem gerar e em segundo lugar porque qualquer onda tridimensional pode ser expressa como uma combinação de ondas planas com amplitudes e direcções de propagação distintas.

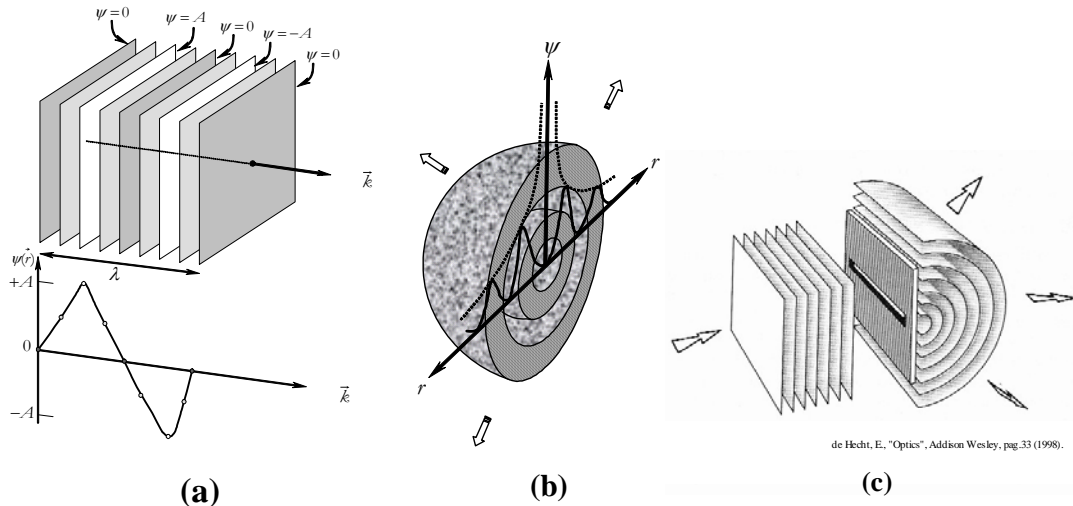


Figura 1 - Representação esquemáticas das ondas tridimensionais planas (a), esféricas (b) e cilíndricas (c).

Relativamente às ondas esféricas elas são constituídas por um conjunto de esferas concêntricas que aumentam de diâmetro à medida que se expandem no espaço (ver figura 4-1(b)). Este tipo de ondas são descritas, por questões de conveniência, em termos de coordenadas esféricas. A função de onda para ondas tridimensionais esféricas tem a forma

$$\psi(r,t) = \left( \frac{A}{r} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon)}$$

onde  $A$  é uma constante que representa a intensidade da fonte. Devido ao factor  $1/r$  as ondas esféricas diminuem de amplitude alterando o seu perfil à medida que se expandem no espaço.

O terceiro tipo de ondas tridimensionais é as ondas cilíndricas. Quando se faz incidir uma frente de onda plana num alvo plano opaco contendo uma fenda fina e suficientemente longa obtém-se uma perturbação sob a forma de uma onda cilíndrica (na figura 4-1(c)). Neste caso o fenómeno é descrito em termos de coordenadas cilíndricas. A função de onda para as ondas cilíndricas apresenta a seguinte forma

$$\psi(r,t) \approx \left( \frac{A}{\sqrt{r}} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

A situação mais comum é a existência de várias ondas a atingirem um mesmo ponto ou a coexistirem ao longo de uma mesma direcção. É então necessário, de acordo com o princípio da sobreposição, mencionado anteriormente, calcular o efeito resultante da combinação dessas várias ondas. Tal como já foi referido, a perturbação resultante da sobreposição de várias ondas num determinado ponto, é dada pela soma algébrica das várias ondas individuais. Duas situações podem ocorrer originando resultados completamente distintos: as ondas que se sobrepõem terem amplitudes e

fases diferentes mas terem a mesma frequência ou então para além de poderem ter amplitudes e fases diferentes também terem frequências diferentes.

No caso da adição de ondas com a mesma frequência a propagarem-se na mesma direcção, resulta ainda uma onda harmónica com a mesma frequência das ondas constituintes mas com amplitude e fase diferentes. A expressão geral para a perturbação global resultante da sobreposição de  $N$  perturbações é a seguinte

$$\psi(x,t) = A \sin[\omega t + \alpha(x,\varepsilon)]$$

onde  $\alpha(x,\varepsilon)$  representa a parte espacial da fase da perturbação resultante e que é dada por

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{i=1}^N A_i \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N A_i \cos \alpha_i}$$

e  $A$  representa a amplitude da perturbação resultante dada por:

$$A^2 = \sum_{i=1}^N A_i^2 + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N A_i^2 A_j^2 \cos(\alpha_i - \alpha_j)$$

Se as fases das diversas perturbações forem aleatórias, a diferença de fase também é aleatória. Nesse caso a soma dos termos em coseno vai tender para zero à medida que  $N$  aumenta. Assim para fontes idênticas, a amplitude da perturbação total será dada por  $A^2 = \sum_{i=1}^N A_i^2 = N A_i^2$ . O quadrado da amplitude de  $N$  fontes idênticas com fases aleatórias, é igual à soma dos quadrados das amplitudes de cada uma das fontes.

Se pelo contrário as  $N$  fontes (idênticas) forem coerentes e em fase no ponto de observação, isto é  $\alpha_i = \alpha_j$ , a perturbação resultante será dada por  $A^2 = (\sum_{i=1}^N A_i^2)^2 = N^2 A_i^2$ . O resultado é que o quadrado da amplitude de  $N$  fontes coerentes idênticas com a mesma fase é igual a  $N^2$  vezes a soma dos quadrados das amplitudes de cada uma das fontes.

Ainda na situação das perturbações terem a mesma frequência mas propagarem-se em sentidos opostos, a perturbação resultante é uma onda estacionária, em oposição a uma perturbação a propagar-se cujo perfil é constante no espaço e é dado por:

$$\psi(x,t) = 2A \sin kx \cos \omega t$$

nesse caso, a amplitude é igual a  $2A \sin kx$ , variando harmonicamente com  $\cos \omega t$ .

Outra situação, é a sobreposição de perturbações com amplitudes semelhantes mas com frequências diferentes. Neste caso a perturbação resultante deixa de ser harmónica sendo dada por:

$$\psi(x,t) = 2A(x,t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \cos(k_m x - \omega_m t)$$

onde  $\bar{\omega}$  e  $\bar{k}$  representam a frequência angular média e a constante de propagação média respectivamente e  $\omega_m$  e  $k_m$  representam a frequência de modulação e a constante de propagação de modulação, respectivamente. O efeito global é as perturbações de baixas frequências a servirem de envolvente, modulando as perturbações de altas frequências. A perturbação resultante apresenta então o fenómeno de batimentos, sendo a frequência de batimento dupla da frequência de modulação da envolvente. A velocidade de propagação das perturbações das altas frequências é a velocidade de fase, enquanto que a velocidade de propagação da envolvente (perturbações das baixa frequência) é denominada velocidade de grupo.

No caso específico da luz sendo os campos eléctrico e magnético, campos vectoriais, a luz é então um fenómeno vectorial. A perturbação resultante da sobreposição de ondas electromagnéticas pode ser expressa em função do campo eléctrico ou do campo magnético. Regra geral, nas equações de onda utiliza-se o campo eléctrico para variável por ser mais simples de ser detectado.

De acordo com o princípio da sobreposição, a intensidade do campo eléctrico num ponto do espaço, resultante da interacção de vários campos eléctricos nesse ponto, é a soma algébrica das intensidades de todos os campos individuais actuantes num ponto. Como o campo eléctrico possui uma elevadíssima frequência de variação, da ordem dos  $10^{14}$  Hz, não é possível ou é impraticável trabalhar-se com valores instantâneos do campo. Trabalha-se então com uma quantidade denominada de irradiância, que é proporcional à média no tempo do quadrado da intensidade do campo eléctrico. A irradiância é uma quantidade que tem a vantagem de poder ser medida directamente através de detectores específicos. Considerem-se então duas ondas da forma

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_1)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_2)$$

onde  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$  representam os vectores de propagação de cada uma das ondas,  $\vec{r}$  representa o vector de posição e  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  representam as fases iniciais de cada onda. Através da definição da irradiância, vista anteriormente, obtém-se a seguinte expressão:

$$I = \varepsilon_0 c \langle \vec{E}^2 \rangle_T.$$

A irradiância total resultante da sobreposição de duas ondas  $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$  e  $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ , é então dada por  $I = I_1 + I_2 + I_{12}$ , onde  $I_{12}$  é o termo de interferência dado por  $I_{12} = 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle_T$ . Calculando este termo em função da diferença de fase global que resulta da diferença de percursos e de fases iniciais das duas ondas, obtém-se a expressão:

$$I_{12} = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \delta$$

Considerando que  $\vec{E}_{01}$  é paralelo a  $\vec{E}_{02}$  (que é a situação mais comum) o termo de interferência vem então dado por

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

onde  $\delta = (\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varepsilon_2)$  é a diferença de fase global entre as duas ondas.

A irradiância total é então dada pela expressão

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta.$$

No caso de todas as ondas apresentarem amplitudes iguais a  $I_0$ , a expressão anterior reduz a

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta)$$

ou ainda a

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

Em conclusão pode afirmar-se que:

- Duas ondas ortogonais linearmente polarizadas não interferem, uma vez que  $I_{12} = 0$ .
- A irradiância máxima é obtida quando  $\cos \delta = 1$ , isto é, quando  $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots$  ou seja quando as duas ondas estão em fase. Esta é a condição de interferência totalmente construtiva.
- A irradiância mínima é obtida quando  $\cos \delta = -1$ . Neste caso  $\delta = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi \dots$  e as duas ondas estão em oposição de fase. É a condição de interferência totalmente destrutiva.
- Quando  $0 < \cos \delta < 1$  as ondas estão desfasadas entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  resultando a condição de interferência construtiva  $I_1 + I_2 < I < I_{\max}$ .
- Quando  $0 > \cos \delta > -1$  as ondas estão desfasadas entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$  resultando a condição de interferência destrutiva,  $I_1 + I_2 > I > I_{\min}$ .
- Quando  $\cos \delta = 0$  as ondas estão desfasadas de  $90^\circ$ , que é a situação de quadratura onde  $I = I_1 + I_2$ .

Para finalizar esta secção que se reveste de maior importância para o estudo dos fenómenos de interferência e difracção, deve ter-se em mente que:

- Para que dois feixes luminosos produzam um padrão estável de interferência, devem ter aproximadamente a mesma frequência, caso contrário existirão variações na diferença de fase extremamente rápidas, o que origina que o valor médio do termo de interferência seja zero durante o intervalo de detecção.
- Para que um padrão de franjas possa ser observado não é necessário que as duas fontes estejam em fase uma com a outra mas que a diferença de fase entre elas permaneça constante, isto é, que as duas fontes tenham coerência espacial.



# Capítulo 1

## Óptica Geométrica

---

### 1.1 Introdução

O tratamento da luz como um movimento ondulatório permite considerar, para uma região de aproximação, o comprimento de onda como sendo muito pequeno quando comparado com as dimensões dos componentes do sistema óptico. Esta região de aproximação é denominada óptica geométrica. Quando o carácter da luz não pode ser ignorado, o campo é conhecido como óptica física. Assim, a óptica geométrica é um caso especial da óptica física podendo ser descrito por:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \{ \text{óptica física} \} = \{ \text{óptica geométrica} \}$$

Como o comprimento da luz (em média 500 nm) é muito pequeno quando comparado com as dimensões dos objectos do dia a dia, o percurso dos feixes de luz através de aberturas ou contornando obstáculos pode ser tratado pela óptica geométrica.

Dentro da aproximação representada pela óptica geométrica, a luz é entendida como viajando em linha recta (raios luminosos) a partir da fonte de luz. O raio é então o percurso ao longo do qual a energia luminosa é transmitida de um ponto para outro num sistema óptico. O raio luminoso é uma construção muito útil, embora abstracta no sentido em que um feixe luminoso não pode ser tão fino de forma a assemelhar-se a uma linha recta. Os raios luminosos são perpendiculares às frentes de onda.

Quando um raio luminoso atravessa um sistema óptico consistindo de vários meios homogêneos colocados sequencialmente, o percurso óptico é uma sequência de segmentos rectilíneos. As descontinuidades nos segmentos ocorrem cada vez que a luz é reflectida ou refractada. As leis da óptica

geométrica que descrevem a direcção subsequente dos raios luminosos são a lei da reflexão e a lei da refacção.

## **1.2 A Propagação da Luz**

Nesta secção vamos estudar os fenómenos de reflexão, refacção e transmissão da luz, os quais serão descritos através de ondas e raios luminosos. Qualquer forma de interacção da luz com a matéria pode ser encarada como um fenómeno que associa um feixe de fótons e uma rede de átomos suspensos, através de campos electromagnéticos, no vazio. Assim, vamos falar da dispersão da luz pela matéria. Os processos de reflexão, refacção e transmissão são manifestações macroscópicas dos processos de dispersão que ocorrem a um nível microscópico.

Se considerarmos um feixe da luz solar com diâmetro reduzido e constituído por uma gama larga de frequências a propagar-se no vazio, chegaremos à conclusão que à medida que o feixe se propaga vai aumentando o seu diâmetro, embora a sua energia se continue a propagar à velocidade da luz. Não iremos observar dispersão, o feixe não será visível de lado. A luz não se cansa nem se degrada (a luz de estrelas de outras galáxias chega à Terra depois de percorrer centenas de milhares de anos). No entanto se no vazio se injectar ar (gás transparente), algumas moléculas de azoto e oxigénio, entre outras, vão fazer com que os fótons que constituem o feixe de luz sejam dispersos em todas as direcções tornando-se visível. Esta é a razão para que o céu apresente uma tonalidade azul de dia e tonalidades ricas em vermelho ao nascer e ao pôr-do-sol.

### **1.2.1 Transmissão e índice de refacção**

A transmissão da luz num meio homogéneo constitui um processo contínuo de dispersão. Cada dispersão introduz variações no campo luminoso, sendo o resultado uma variação da velocidade com que o feixe é transmitido (velocidade de fase) relativamente à velocidade da luz no vazio. Isto equivale a atribuir ao meio de transmissão, um valor para a razão entre a velocidade da luz e a velocidade de fase ( $c/v$ ), diferente da unidade. Ao valor da razão entre a velocidade da luz e a velocidade de fase chama-se índice de refacção e representa-se pela letra  $n$ .

Os valores do índice de refacção variam consoante os diferentes materiais atravessados, para além de variarem com o estado físico (pureza, pressão, temperatura, etc.). Na tabela 1-1 apresentam-se alguns valores de índices de refacção para diversos materiais.

Tabela 1- 1 Índices de refração de várias substâncias

Substância	Índice de refração
Ar	1,00029
Gelo	1,310
Água	1,333
Silício amorfo	1,4584
Vidro “crown”	1,520
Cloreto de sódio	1,544
Vidro “flint”	1,580
Vidro “flint” denso	1,660
Zircónio	1,923
Diamante	2,417
Rutílio	2,907

A dispersão dos fotões gera ondas secundárias, que ao combinar-se com o que resta da onda primária vai constituir uma única onda, que será a onda transmitida. Tanto a onda primária como a onda secundária propagam-se no vazio ( $n = 1$ ) à velocidade da luz. No entanto num meio material ( $n \neq 1$ ) uma onda luminosa propaga-se com velocidades inferiores à velocidade da luz. Essa velocidade está relacionada com o índice de refração do meio atravessado. O conceito de índice de refração traduz o modo como os processos de absorção e de emissão alteram (atrasam ou avançam) a fase dos fotões dispersos, mesmo que os fotões se propaguem à velocidade  $c$ .

### 1.2.2 Reflexão

Quando um raio luminoso é reflectido numa interface (zona de separação) dividindo dois meios ópticos, parte da energia é retro-dispersa, fenómeno conhecido como reflexão.

Consideremos um bloco de vidro homogéneo de faces planas, polidas e paralelas e um feixe luminoso vindo do ar a atravessar o bloco de vidro, tal como se apresenta na figura 1-1.

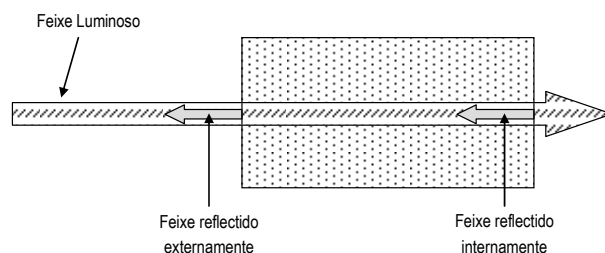


Figura 1- 1 Feixe luminoso a propagar-se num meio óptico e homogéneo e as respectivas reflexões externa e interna.

Para um bloco de vidro no ar e em incidência normal, cerca de 4% da energia incidente é reflectida na primeira superfície de separação (interface ar-vidro). Como a luz se propaga de um meio menos denso para um meio mais denso diz-se que se trata de reflexão externa. Assim, a reflexão externa ocorre quando o índice de refração do meio incidente ( $n_i$ ) é inferior ao índice de refração do meio transmitido ( $n_t$ ). Do mesmo modo cerca de 4% da energia incidente na superfície de separação vidro-ar é reflectida internamente. Para incidência normal, a reflexão interna ocorre quando o índice de refração do meio incidente ( $n_i$ ) é superior ao índice de refração do meio transmitido ( $n_t$ ).

### 1.2.3 A lei da reflexão

Consideremos um feixe luminoso no ar a incidir na superfície plana de um bloco de vidro (ver figura 1-2). À medida que a frente de onda relativa ao feixe luminoso incidente percorre o meio incidente, cada elemento desse meio vai radiar um feixe de fótons (sob a forma de uma onda esférica) que se propaga no meio de incidência. Como o comprimento de onda é muito superior à separação entre as moléculas do meio, as ondas rectro-dispersas para o meio de incidência propagam-se em fase, sobrepondo-se construtivamente ao longo de uma direcção bem definida, dando origem a um feixe reflectido bem definido.

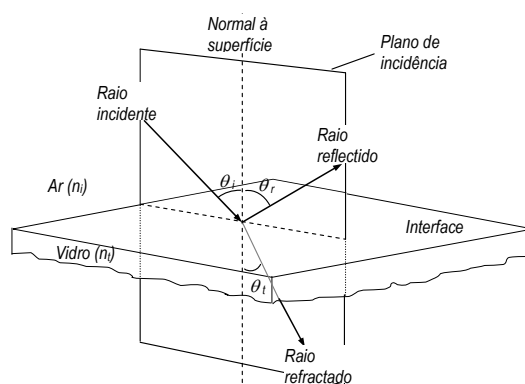


Figura 1- 2 Esquema óptico da reflexão e refração numa interface entre dois meios ópticos, mostrando os raios incidente, reflectido e refractado (transmitido) no plano de incidência.

A direcção do feixe reflectido é função do ângulo que a direcção de propagação da onda incidente faz com a normal à superfície, isto é, o ângulo de incidência. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para as ondas que se propagam no interior do vidro formando o feixe refractado ou transmitido, que é função do ângulo que a direcção de propagação faz com a normal à superfície (ângulo de refacção).

Retornemos à parte reflectida do raio que incide na interface entre o ar e o vidro. Analisando a figura 1-3, vemos que a linha  $\overline{AB}$  representa uma frente de onda incidente e a linha  $\overline{CD}$  representa uma frente de onda reflectida. Então por reflexão  $\overline{AB}$  transforma-se em  $\overline{CD}$ . Para que todas as ondas emitidas, resultantes da dispersão pelas moléculas do meio incidente, se sobreponham e constituam uma onda reflectida única,  $\overline{AC} = \overline{BD}$ . Como os dois triângulos têm em comum a hipotenusa, temos que:

$$\frac{\sin \theta_i}{\overline{BD}} = \frac{\sin \theta_r}{\overline{AC}}$$

donde

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r$$

e portanto  $\theta_i = \theta_r$ , equação que constitui a lei da reflexão.

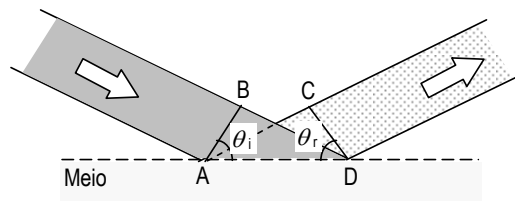


Figura 1- 3 Esquema representativo da incidência e reflexão num determinado meio.

Lei da reflexão: quando um raio luminoso é reflectido numa interface separando dois meio ópticos, o raio reflectido permanece no plano de incidência, sendo o ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência. O plano de incidência é o plano que contém o raio incidente e a normal à superfície no ponto de incidência.

Devemos ter em atenção que nem todas as superfícies onde se processa a reflexão são polidas. Por isso temos que distinguir entre reflexões em superfícies polidas e reflexões em superfícies rugosas (não polidas). Desde que as depressões ou elevações existentes à superfície sejam pequenas, relativamente ao comprimento de onda, as ondas dispersas apresentam basicamente a mesma fase quando  $\theta_i = \theta_r$ . Neste caso estamos perante a reflexão dita especular. Por outro lado, quando a rugosidade da superfície é significativa relativamente ao comprimento de onda, apesar dos ângulos de incidência e reflexão serem iguais para cada raio, o conjunto dos raios reflectidos dá origem a um feixe que não se propaga numa direcção bem definida. Neste caso estamos perante a reflexão dita difusa. Enquanto na reflexão especular todos os raios de um feixe de luz colimado, incidentes numa superfície, obedecem à lei da reflexão numa superfície plana e são reflectidos também como um feixe colimado, na

reflexão difusa embora a lei da reflexão seja obedecida localmente para cada um dos raios, como a superfície reflectora é rugosa os raios de luz do feixe colimado são reflectidos em várias direcções resultando numa luz reflectida de forma difusa.

## 1.2.4 Refracção

Consideremos um feixe de luz a incidir obliquamente numa interface entre dois meios, segundo um ângulo de incidência diferente de zero. O resultado é a existência de um feixe transmitido para o interior do meio de transmissão, que apresenta um desvio angular relativamente à direcção do feixe incidente, tal como se pode ver na figura 1-4.

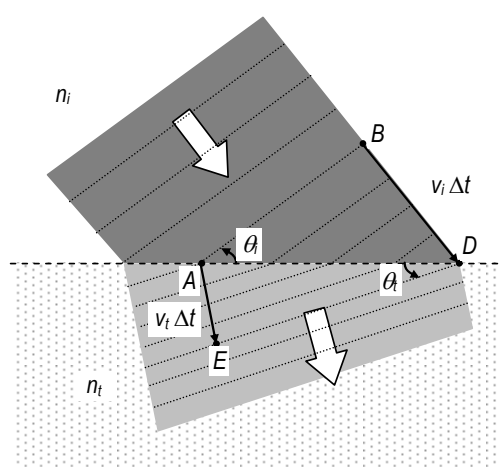


Figura 1- 4 Esquema para a refração de uma frente de onda numa interface entre dois meios ópticos.

Cada superfície de onda é uma superfície de fase constante e, na medida em que a fase de onda global é atrasada pelo meio de transmissão, cada frente de onda é de algum modo retida na superfície de descontinuidade.

Observando a figura 1-4 concluiu-se que no intervalo de tempo  $\Delta t$ , o ponto B de uma frente de onda a propagar-se à velocidade  $v_i$  chega ao ponto D e que a nova posição do ponto A inicialmente sobre a interface é o ponto E.

Se o meio de transmissão tiver um índice de refração superior ao meio de incidência então  $v_t < v_i$  donde  $\overline{AE} < \overline{BD}$  e a orientação da frente de onda altera-se. A frente de onda refractada estende-se de E a D, fazendo um ângulo  $\theta_t$  com a superfície de descontinuidade. Os triângulos ABD e AED têm uma hipotenusa comum ( $\overline{AD}$ ). Então,

$$\frac{\sin \theta_i}{\overline{BD}} = \frac{\sin \theta_t}{\overline{AE}}$$

como  $\overline{BD} = v_i \Delta t$  e  $\overline{AE} = v_t \Delta t$ , temos

$$\frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\sin \theta_t}{v_t}$$

e como  $n_i = c/v_i$  e  $n_t = c/v_t$  obtemos

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t.$$

Esta equação é conhecida como a lei de Snell ou lei da refração que afirma: que quando um raio luminoso é refractado numa interface separando dois meios ópticos, o raio transmitido permanece no plano de incidência sendo o seno do ângulo de refração directamente proporcional ao seno do ângulo de incidência.

Então das leis de reflexão e de refração conclui-se que os raios incidente, reflectido e transmitido pertencem todos ao plano de incidência.

Quando  $n_i < n_t$ , ou seja quando a luz se propaga de um meio de menor índice de refração para um meio com índice de refração superior, da lei de Snell resulta que  $\sin \theta_i > \sin \theta_t$  donde  $\theta_i > \theta_t$ , isto é, os raios luminosos aproximam-se da normal. Por outro lado se  $n_i > n_t$ , quando a luz se propaga de um meio com maior índice de refração para um meio com índice de refração inferior, os raios luminosos afastam-se da normal.

Se utilizarmos o índice de refração relativo entre os dois meios ( $n_{ti}$ ) em que  $n_{ti} = n_t/n_i$ , a lei de Snell pode ser escrita como

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = n_{ti}$$

Outra conclusão que se pode reter da lei de refração, é que o comprimento de onda do feixe transmitido diminui, uma vez que a frequência se mantém inalterada e a velocidade diminui. Como  $\lambda = c/v = c/nv$ , vem que  $\lambda = \lambda_0/n$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda do meio transmitido e  $\lambda_0$  é o comprimento de onda do meio incidente (vazio).

### 1.3 O Princípio de Huyghens

Huyghens foi um físico Alemão, que em 1690 enunciou um princípio no qual a luz podia ser vista como uma série de pulsos, emitidos a partir de cada ponto de um corpo luminoso e a propagar-se através das

partículas do éter (meio elástico que preencheria todo o espaço). O princípio de Huyghens diz que cada ponto de uma frente de onda primária constitui uma fonte para ondas esféricas secundárias, e a posição da frente de onda primária num instante posterior é determinada pela envolvente de todas estas ondas secundárias (fig. 1-5 e 1-6). Apesar das suas limitações, o princípio de Huyghens permite obter a lei de Snell. No séc. XIX, Fresnel (um matemático Francês) fez alterações ao princípio de Huyghens, introduzindo a ocorrência de interferências.

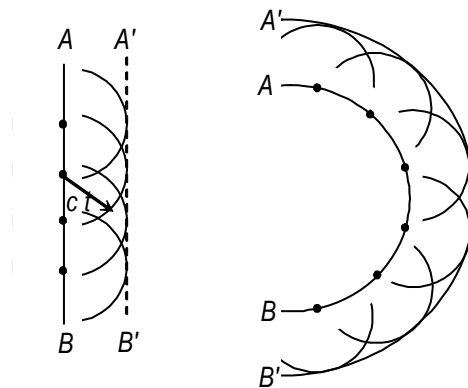


Figura 1- 5 Ilustração do princípio de Huyghens para ondas planas e esféricas.

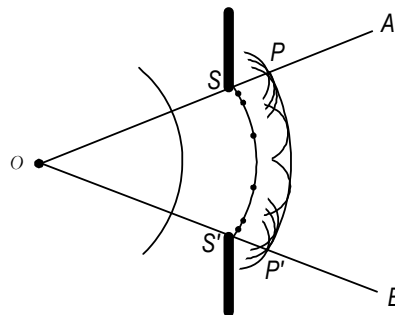


Figura 1- 6 Construção de Huyghens para uma frente de onda obstruída.

Consideremos a figura 1-7, onde se representa uma frente de onda AC a incidir numa interface XY, segundo um ângulo de incidência  $\theta_i$ , formado pelos raios AD, BE e CF com a normal à interface PD. Se não existisse interface, após um determinado intervalo de tempo iríamos ter a frente de onda GI. A inclusão de uma superfície de separação reflectora determina que, no mesmo intervalo de tempo que a frente de onda AC demoraria a atingir GI, essa mesma frente atinge IM.



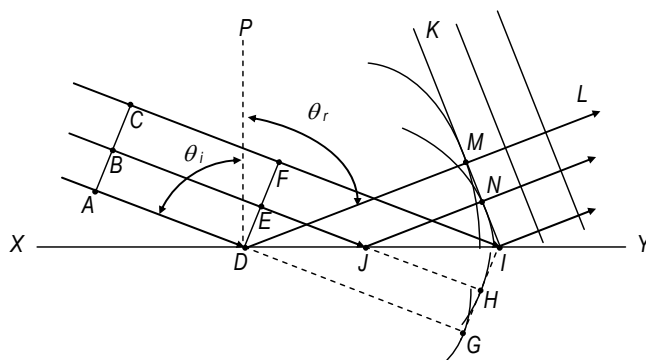


Figura 1- 7 Construção de Huyghens para demonstração da lei da reflexão.

Suponhamos que o raio  $CF$  num intervalo de tempo  $\Delta t$  chega ao ponto  $I$ , durante o mesmo intervalo de tempo, o raio  $BE$  avançou de  $E$  até  $J$  continuando depois da reflexão até à distância equivalente de  $JH$  (se não existisse interface), isto é, até ao ponto  $N$ . O mesmo tipo de raciocínio pode ser aplicado ao raio  $AD$ . O ponto  $D$ , no mesmo intervalo de tempo que demoraria a chegar a  $DG$  (se não existisse interface), depois da reflexão avançou da mesma distância e chegou ao ponto  $M$ . Assim, após um intervalo de tempo, a nova frente de onda que tem de ser tangente aos raios luminosos nos pontos  $I$ ,  $N$  e  $M$  será  $IK$ . O raio reflectido representativo é o raio  $DL$  representado na figura 1-7. A normal à interface ( $PD$ ) para esse raio é usada para definir os ângulos de incidência e de reflexão. Se as distâncias  $DG$  e  $DM$  são iguais, então os ângulos formados pelos triângulos  $GDI$  e  $IDM$  também são iguais, donde se pode concluir que  $\theta_i = \theta_r$ .

Observemos agora a figura 1-8 que tal como na figura 1-7 representa uma frente de onda  $AC$  a incidir numa interface  $XY$ , segundo um ângulo de incidência  $\theta_i$ , formado pelos raios  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  com a normal à interface  $PD$ . Neste caso as velocidades de propagação no meio de incidência e de transmissão são diferentes. Os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  da frente de onda incidente chegam aos pontos  $D$ ,  $J$  e  $I$  da interface em tempos diferentes. Na ausência da interface formar-se-ia a frente de onda  $GI$  quando o raio  $CF$  chegasse a  $I$ . Durante a progressão do raio  $CF$  para atingir o ponto  $I$  num intervalo de tempo  $\Delta t$ , o raio  $AD$  entra no meio de transmissão deslocando-se com uma velocidade inferior à do meio de incidência. Se a distância  $DG$  é  $v_i \Delta t$  e a distância  $DM$  é  $v_t \Delta t$  então teremos:

$$DG = v_i \Delta t \text{ e } DM = v_t \Delta t \text{ donde,}$$

$$\Delta t = \frac{DG}{v_i} \text{ e } DM = v_t \left( \frac{DG}{v_i} \right) = \left( \frac{n_i}{n_t} \right) DG$$

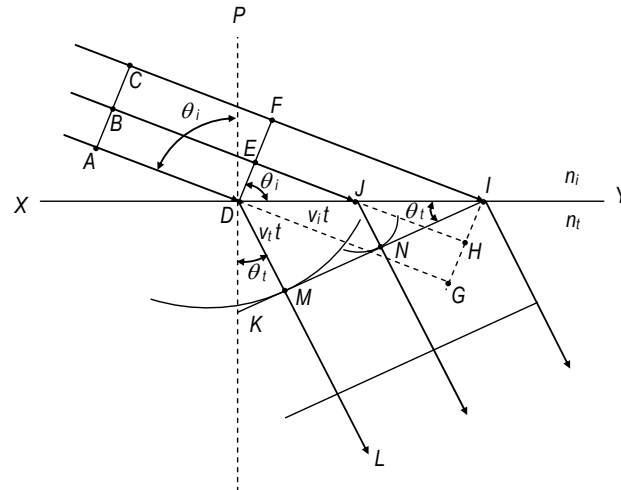


Figura 1- 8 Construção de Huygens para demonstração da lei da refração.

Do mesmo modo para o ponto  $J$  teremos que,

$$JN = \left( \frac{n_i}{n_t} \right) JH$$

Da relação geométrica entre os ângulos  $\theta_i$  e  $\theta_t$ , formados pelo raio incidente  $AD$  e pelo raio refratado  $DL$  com a normal ao plano de incidência, vem que

$$\sin \theta_i = \frac{FI}{DI} \text{ e } \sin \theta_t = \frac{DM}{DI} \text{ vem:}$$

$$\frac{FI}{DM} = \frac{DG}{DM} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t}$$

como

$$DM = (n_i / n_t) DG$$

temos então que

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$$

que é a lei de Snell para a refração numa interface entre dois meios ópticos.

## 1.4 O Princípio de Fermat

No séc. II a.C., Hero de Alexandria escreveu que quando a luz se propaga entre dois pontos faz o menor trajecto possível. Para a propagação entre dois pontos no mesmo meio, o menor percurso é a linha recta que une os dois pontos. Quando a luz que parte de um ponto  $A$  sofre uma reflexão numa superfície plana a chega ao ponto  $B$ , ela poderia ir por vários caminhos como se pode ver na figura 1-9, onde estão representados três percursos possíveis para se ir do ponto  $A$  até ao ponto  $B$ . Começemos por considerar o percurso  $ACB$ . Construa-se o ponto  $A'$  de tal modo que  $AO$  seja igual a  $AO'$ . Deste modo os triângulos  $AOC$  e  $A'OC$  são iguais,  $AC$  é igual a  $A'C$  e a distância percorrida pelo raio de luz desde  $A$  até  $B$  passando por  $C$  é a mesma que é percorrida desde  $A'$  até  $B$  passando por  $C$ . A distância mais curta desde  $A'$  até  $B$  é a linha recta  $A'DB$ , donde o percurso  $ADB$  é o escolhido pelo raio para ir de  $A$  até  $B$ . Da geometria dos raios luminosos podemos concluir que o ângulo  $ADO$  é igual ao ângulo  $A'DO$ , o qual por sua vez é igual ao ângulo  $BDO'$ . Assim para o percurso mais curto temos que  $\theta_i = \theta_r$ , que é a lei da reflexão.

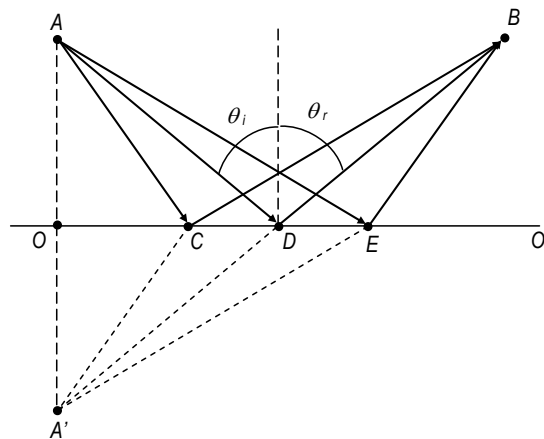


Figura 1- 9 Esquema para provar a lei de reflexão a partir do princípio de Hero.

Em 1657 um matemático Francês chamado Pierre de Fermat, generalizou o princípio de Hero para provar a lei da refacção. Se um ponto  $B$  estiver abaixo da superfície de separação, isto é, se estiver no meio de transmissão (ver figura 1-10), o percurso correcto para ir de  $A$  a  $B$  não é o caminho mais curto ou a linha recta  $AB$ , para a qual o ângulo de incidência seria igual ao ângulo de refacção, o que ia contra a lei empírica estabelecida para a refacção.

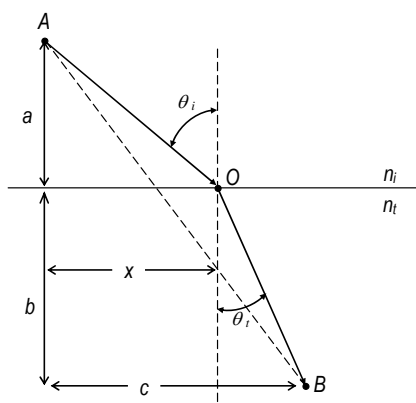


Figura 1- 10 Esquema para provar a lei de refração a partir do princípio de Fermat.

Tendo em conta a economia existente na natureza, Fermat supôs, em vez do percurso mínimo, que o raio de luz que viaje de  $A$  até  $B$  toma o caminho que demore o menor tempo possível a percorrer esse percurso (princípio do tempo mínimo), que é uma generalização que inclui o princípio de Hero e se aplica tanto à reflexão como à refração. Se a luz se desloca mais devagar no segundo meio, tal como é assumido na figura 1-10, os raios luminosos inclinam-se na interface de forma que o percurso demore menos tempo no segundo meio, minimizando o tempo total de percurso entre  $A$  e  $B$ . Matematicamente para minimizar o tempo total temos que minimizar a expressão

$$t = \frac{AO}{v_i} + \frac{OB}{v_t}$$

onde  $v_i$  e  $v_t$  são as velocidades da luz nos meios incidente e transmitido, respectivamente. Da figura 1-10 e empregando o teorema de Pitágoras obtemos:

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_i} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_t}$$

Para minimizar a expressão anterior temos que calcular a derivada do tempo em relação à posição e igualar a zero, isto é,  $dt/dx = 0$ . Assim temos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_i \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_t \sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0$$

mas da figura 1-10 tiramos que  $\sin \theta_i = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$  e  $\sin \theta_t = \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$  donde

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin \theta_i}{v_i} - \frac{\sin \theta_t}{v_t} = 0$$

ou seja

$$v_t \sin \theta_i = v_i \sin \theta_t .$$

como  $v = c/n$  obtemos então

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t ,$$

que é a Lei de Snell.

## 1.5 O Princípio da Reversibilidade

Se nas figuras 1-9 e 1-10 o papel dos pontos  $A$  e  $B$  forem trocados, de forma que  $B$  seja agora a fonte de luz de onde emanam os raios luminosos e  $A$  o ponto final do percurso de um raio luminoso, o princípio de Fermat do tempo mínimo tem de prever o mesmo percurso, tal como determinado para a direcção original da propagação da luz. Generalizando, podemos então dizer que, qualquer raio luminoso de um sistema óptico que sofra uma inversão no seu sentido de propagação, percorrerá o mesmo percurso agora em sentido contrário. Este é o princípio de reversibilidade que é muito útil em algumas aplicações ópticas.

## 1.6 Reflexão em Espelhos Planos

A formação de imagens em espelhos planos é o caso mais simples da formação de imagens em sistemas ópticos. Considere-se a reflexão especular de um único raio de luz  $OP$  por um plano  $xy$  (ver figura 1-11).

Da lei da reflexão, o raio reflectido  $PQ$  permanece no plano de incidência fazendo um ângulo com a normal a  $P$  igual ao ângulo de incidência. Se o percurso  $OPQ$  for descrito em coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , a direcção do raio  $OP$  é alterado pela reflexão só ao longo da direcção  $z$ , resultando na inversão da componente  $z$ . Se a direcção do raio incidente for descrita pelo vector unitário  $r_1 = (x, y, z)$ , então por reflexão vamos ter que  $r_1 = (x, y, z) \rightarrow r_2 = (x, y, -z)$

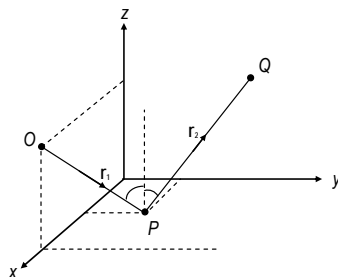


Figura 1- 11 Geometria de um raio reflectido por um plano.

Da mesma forma se um raio incidente for reflectido sequencialmente nos três planos coordenados, tal como apresentado esquematicamente na figura 1-12, o resultado será então  $r_1 = (x, y, z) \rightarrow r_2 = (-x, -y, -z)$ , e o raio reflectido retorna precisamente paralelo à direcção do raio incidente.

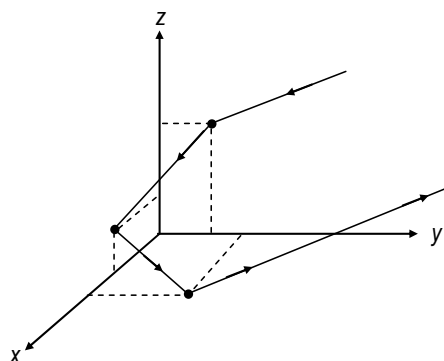


Figura 1- 12 Geometria de um raio reflectido pelos três planos coordenados.

A formação da imagem num espelho plano é ilustrada na figura 1-13. Os raios de luz provenientes de um ponto objecto  $S$  (por exemplo uma fonte de luz) incidem num espelho plano, sendo reflectidos por este de acordo com a lei da reflexão. Da figura 1-13 podemos ver que os triângulos  $SNP$  e  $S'NP$  são iguais e que todos os raios reflectidos parecem ter origem no ponto imagem  $S'$ , que se encontra no prolongamento da linha  $SN$  a uma profundidade tal que a distância imagem  $S'N$  é igual à distância objecto  $SN$ . O olho observa um ponto imagem em  $S'$  exactamente da mesma forma que veria um ponto objecto real que estivesse colocado nesse local. Como nenhum dos raios luminosos atravessa o espelho passando para a sua superfície posterior, diz-se desta imagem que é uma imagem virtual. A imagem  $S'$  não pode ser projectada num alvo como no caso de uma imagem real.

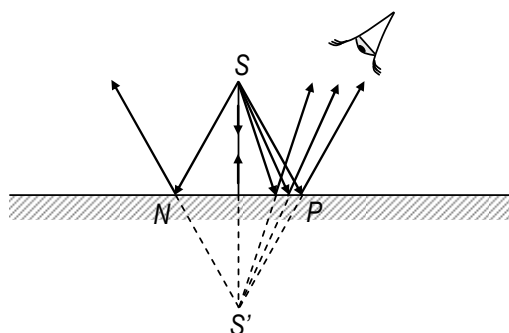


Figura 1- 13 Formação da imagem num espelho plano.

No caso de objectos extensos, todos os pontos desses objectos (seta na figura 1-14) formam pontos semelhantes através de um plano. Cada ponto objecto tem o seu ponto imagem ao longo da normal que faz com a superfície do espelho, à mesma distância que o objecto estiver do espelho, mas do lado oposto. De notar que a posição da imagem é independente da posição do olho do observador. Para

além disso a dimensão da imagem é igual à dimensão do objecto, donde para espelhos planos a ampliação é unitária.

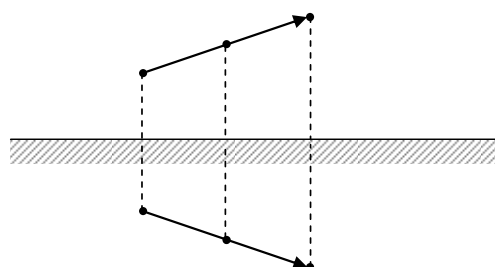


Figura 1- 14 Formação da imagem de uma seta por um espelho plano.

Por outro lado, uma mão direita aparece no espelho como uma mão esquerda. O processo que transforma um sistema de coordenadas direito, no espaço objecto, num sistema esquerdo, no espaço imagem, tem o nome de reversão.

Quando o espelho não se situa directamente abaixo do objecto, o espelho plano pode ter-se virtualmente expandido para determinar a posição da imagem, tal como é observada por um olho posicionado de forma a receber os raios reflectidos originários do objecto (figura 1-15).

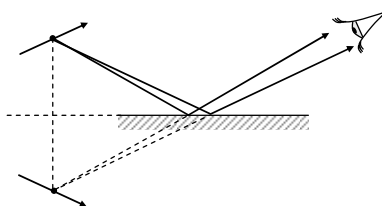


Figura 1- 15 Formação da imagem num espelho plano (inversão).

## 1.7 Reflexão em Superfícies Esféricas

Os espelhos esféricos podem ser côncavos ou convexos relativamente a um objecto, dependendo se o centro de curvatura se encontrar do mesmo lado ou do lado oposto à superfície de reflexão (ver figura 1-16).

Para analisar a reflexão dos raios luminosos numa superfície esférica, devemos estabelecer certas definições e convenções de sinais. O centro de curvatura  $C$  é o centro da superfície esférica (ver figura 1-16) e o ponto  $V$  é o vértice da calote esférica. A distância entre o ponto  $V$  e o objecto designa-se distância objecto e a distância entre o ponto  $V$  à imagem designa-se distância imagem. O raio de curvatura é a distância entre o centro de curvatura do espelho e um ponto da superfície do espelho. A linha que passa por  $V$  e  $C$  designa-se eixo principal.

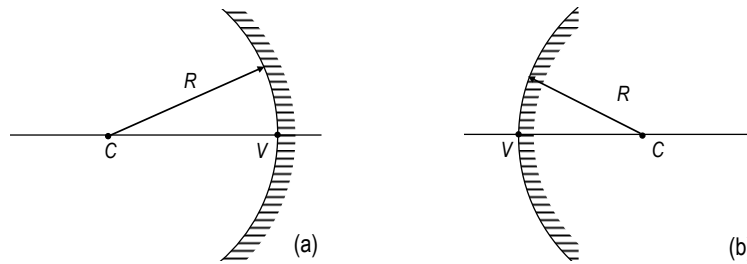


Figura 1- 16 (a) Espelho côncavo e (b) espelho convexo, onde  $C$ ,  $R$  e  $V$  representam o centro de curvatura, o raio de curvatura e o vértice do espelho, respectivamente.

Existem várias convenções de sinais e cada um pode estabelecer uma nova convenção de sinais, desde que seja coerente e com alguma lógica. As expressões que permitem calcular e caracterizar completamente o sistema óptico dependem das convenções de sinais. Assim, torna-se importante conhecer as convenções de sinais mais utilizadas nos vários livros de óptica.

### 1.7.1 Exemplos de convenções de sinais

Regra geral, em todas as convenções de sinais, é assumido que a luz se propaga da esquerda para a direita. Vamos apresentar a seguir três convenções de sinais muito utilizadas em óptica.

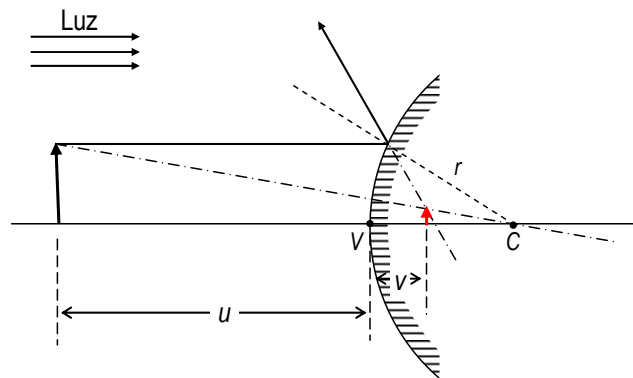


Figura 1- 17 Trajetória de um raio refletido num espelho convexo esférico. A vermelha está indicada a imagem formada da seta a negro pelo espelho convexo.

#### 1ª Convenção

1. A distância objecto ( $u$ ) é positiva quando o objecto se encontra à esquerda do vértice, correspondendo a um objecto real. Quando o objecto se encontra à direita do vértice a distância objecto é negativa correspondendo a um objecto virtual.
2. A distância imagem ( $v$ ) é positiva quando a imagem se encontra à esquerda do vértice, correspondendo a uma imagem real. Quando a imagem se encontra à direita do vértice a distância imagem é negativa correspondendo a uma imagem virtual.



3. O raio de curvatura ( $r$ ) é positivo quando o centro de curvatura  $C$  se encontra à direita do vértice, correspondendo a um espelho convexo, e é negativo quando o centro de curvatura  $C$  se encontra à esquerda do vértice, correspondendo a um espelho côncavo.
4. A altura do objecto e da imagem são positivas quando o objecto e a imagem se encontram acima do eixo óptico, e são negativas quando o objecto e a imagem se encontram abaixo do eixo óptico.

## 2ª Convenção

1. Tendo em atenção o sentido de propagação da luz, todas as quantidades medidas no sentido da propagação da luz são positivas e todas as quantidades medidas no sentido contrário à propagação da luz são negativas.
2. As distâncias objecto e imagem, distâncias focais e raios de curvatura são medidos a partir da lente, do espelho ou da superfície de trabalho. Todos os sinais são de acordo com o ponto 1.
3. Os diagramas são em geral desenhados de modo a que a luz incidente provenha da esquerda para a direita.
4. A distância vertical a partir do eixo óptico até um ponto acima deste é tomada como positiva e para um ponto abaixo do eixo é negativa.
5. Os ângulos medidos na direcção contrária aos ponteiros do relógio são positivos. O ângulo entre um raio e o eixo óptico é medido a partir do raio em direcção ao eixo.

## 3ª Convenção

Desenhando um sistema de eixos cartesianos na superfície reflectora ou refractora, tal que a origem do sistema de eixos coincida com o vértice da superfície,  $V$ , teremos que:

1. As distâncias imagem e objecto são positivas para a direita do vértice e negativas para a esquerda de  $V$ .
2. O raio de curvatura é positivo quando o centro de curvatura  $C$  está à direita do vértice e negativo quando  $C$  está à esquerda de  $V$ .
3. As dimensões verticais são positivas acima do eixo horizontal (eixo óptico) e negativas abaixo desse eixo.

Neste livro vamos utilizar a 3ª convenção de sinais expressa na figura abaixo.

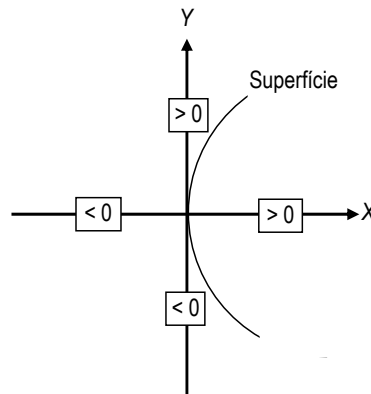


Figura 1- 18 Representação da convenção sinais utilizada.

### 1.7.2 Símbolos

Os símbolos para as quantidades mais importantes são os que se seguem:

Índice de refração -  $n$

Distância objecto -  $u$

Distância imagem -  $v$

Distância focal imagem -  $f$

Distância focal imagem -  $f'$

Raio de curvatura -  $r$

Altura do objecto -  $h$

Altura da imagem -  $h'$

As letras maiúsculas denotam a distância recíproca de uma distância, por exemplo:  $V = 1/v$  e  $R = 1/r$ ,  $F = 1/f$ , etc.

Números em subscrito identificam uma série de refrações ou reflexões sucessivas, por exemplo  $h_2'$  denota a altura da imagem depois da segunda reflexão.

### 1.7.3 Equação dos espelhos

A equação que relaciona os pontos conjugados objecto e imagem com os parâmetros físicos de um espelho esférico deduz-se com a ajuda da figura 1-19.

As distâncias objecto e imagem medidas a partir do vértice estão representados na figura 1-19 pelas letras  $u$  e  $v$ , respectivamente. Pode estabelecer-se uma relação entre essas duas quantidades com base no raio de curvatura. Para isso vamos recorrer aos ângulos  $\alpha$ ,  $\theta_i$ ,  $\theta_r$  e  $\varphi$  representados na figura 1-19.

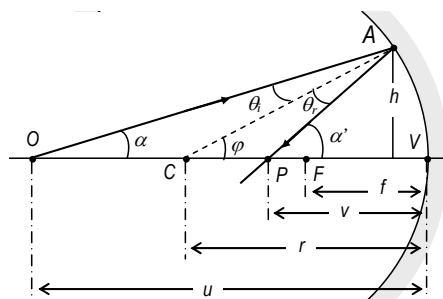


Figura 1- 19 Espelho esférico côncavo. Focos conjugados.

Como se sabe o seno e o co-seno podem ser desenvolvidos numa série de termos:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

Considerando só o primeiro termo da série para o seno e o co-seno temos:

$$\sin \varphi \cong \varphi$$

$$\cos \varphi \cong 1$$

Esta aproximação chamada aproximação paraxial, é uma boa aproximação só para ângulos pequenos. Por exemplo para ângulos da ordem dos  $10^\circ$ , a aproximação apresenta um erro da ordem de 1,5%. Esta aproximação introduz-nos na óptica de 1º ordem ou óptica Gaussiana (de Karl Gauss, que em 1841 desenvolveu os fundamentos deste tópico).

Da figura 1-19 podemos relacionar os ângulos  $\alpha$ ,  $\theta_i$ ,  $\theta_r$  e  $\varphi$  com base nos triângulos OAC e OAP. Assim temos que

$$\theta_i = \varphi - \alpha \text{ e } 2\theta_i = \alpha' - \alpha.$$

combinando as duas equações vem que  $2\varphi = \alpha + \alpha'$ . Como para ângulos pequenos

$$\tan \alpha \cong \alpha = \frac{h}{u}; \quad \tan \alpha' \cong \alpha' = \frac{h}{v} \text{ e } \tan \varphi \cong \varphi = \frac{h}{r}$$

vem que

$$2\frac{h}{r} = \frac{h}{u} + \frac{h}{v}$$

ou seja

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{r}$$

A equação anterior é válida para espelhos côncavos. No caso de espelhos convexos tem-se:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = -\frac{2}{r}$$

No entanto é possível através da convenção de sinais obter-se uma equação geral para o caso de espelhos esféricos, quer sejam côncavos quer sejam convexos. Como  $r > 0$  para espelhos convexos e  $r < 0$  para espelhos côncavos a equação geral será

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{r}$$

Esta é a equação dos espelhos que é aplicável tanto a espelhos côncavos como a espelhos convexos. Se assumirmos o raio de curvatura infinito (como é o caso de espelhos planos) vem que  $u = -v$  tal como já foi visto anteriormente quando se falou na formação da imagem em espelhos planos. O sinal negativo implica uma imagem virtual para um objecto real.

#### 1.7.4 Pontos focais de superfícies de reflexão esféricas

Para superfícies de reflexão esféricas, resulta da equação dos espelhos esféricos que, para qualquer ponto objecto  $O$  existe um ponto imagem  $O'$  correspondente. A distância de  $O'$  ao vértice da superfície de reflexão (espelho esférico),  $V$ , pode ser calculada através da equação dos espelhos conhecendo-se a distância objecto e o raio de curvatura do espelho. Como o percurso da luz é reversível, as posições dos pontos objecto e imagem são permutadas. Assim a luz vinda de  $O'$ , em sentido contrário, passará por  $O$ . Pares de pontos objectos e imagens tal como  $O$  e  $O'$  são conhecidos como pontos conjugados.

Quando um objecto está no infinito, ou se encontra a uma distância infinita da superfície do espelho, a frente de onda é plana e os raios são paralelos ao eixo óptico. Nesse caso diz-se que o feixe de luz é colimado. Um feixe de luz colimado reflectido por um espelho esférico côncavo, converge para um ponto imagem real  $F'$  (ponto focal imagem), enquanto que num espelho convexo a luz reflectida é divergente, parecendo emergir de um ponto imagem virtual  $F'$ . Em ambos os casos esta imagem, conjugada de um ponto objecto no infinito, é chamada de ponto focal imagem ou segundo foco principal da superfície e a sua distância ao vértice é chamada distância focal imagem ou segunda distância focal,  $f'$ . Em espelhos esféricos a posição do ponto focal objecto coincide com a posição do ponto focal imagem.

Para espelhos côncavos, quando o objecto se situa no ponto focal objecto ou primeiro foco principal, a imagem formada pelo espelho está no infinito e a luz reflectida é paralela ao eixo óptico. Se o

objecto se mover para uma posição entre o foco objecto e o vértice do espelho, a luz reflectida torna-se divergente parecendo ter origem numa imagem virtual, situada atrás do espelho e a uma distância do espelho superior à distância a que se encontra o objecto do espelho. Para espelhos convexos, a luz reflectida é sempre divergente e portanto a imagem formada é sempre virtual. Quando o objecto está muito distante do espelho, a imagem situa-se no ponto focal imagem ou segundo foco principal,  $F'$ , e a distância a que está do vértice do espelho é a distância imagem, ou segunda distância focal,  $f'$ . Quando a luz incidente é colimada a luz reflectida é divergente parecendo ter origem no ponto focal imagem ou segundo foco principal. Se a luz incidente convergir para o ponto focal objecto,  $F$ , a luz reflectida é colimada, donde a imagem está no infinito.

Tal como referido acima, para um objecto no infinito os raios incidentes são paralelos. Nesse caso como  $u = \infty$ , da equação dos espelhos vem que  $v = r/2$  (a distância imagem é definida como distância focal do espelho) e

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

sendo que

$$f = \frac{r}{2} \begin{cases} > 0, \text{ espelho côncavo} \\ < 0, \text{ espelho convexo} \end{cases}$$

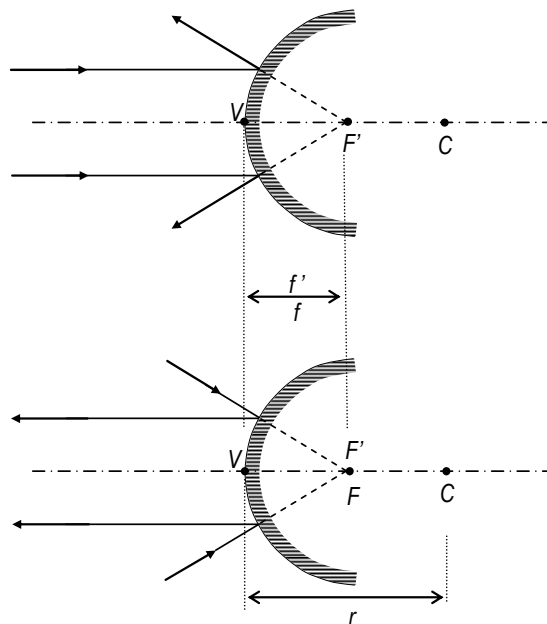


Figura 1- 20 Pontos focais, distâncias focais, raios de curvatura, pontos imagem e objecto em superfícies de reflexão convexas.

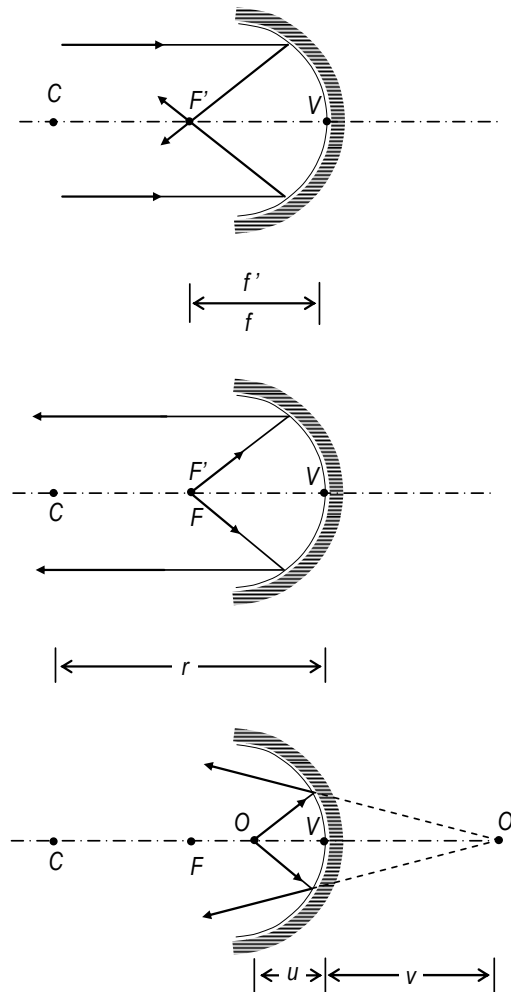


Figura 1- 21 Pontos focais, distâncias focais e raios de curvatura em superfícies de reflexão concavas.

### 1.7.5 Formação da imagem em espelhos esféricos

A grande maioria dos objectos com que lidamos no dia a dia não são pontos mas objectos extensos. Considerando que um objecto extenso é constituído por um grande conjunto de pontos, só um ponto desses pontos está situado no eixo óptico estando todos os outros fora de eixo. A designação pontos não axiais é usada para descrever esses mesmos pontos. Assume-se que os pontos que constituem o objecto estão suficientemente perto do eixo óptico, para que a aproximação paraxial (ângulos pequenos) seja válida. Nos vários diagramas que serão apresentados as alturas dos objectos são exageradas para maior clareza e melhor compreensão do esquema óptico.

Na figura 1-22 o objecto  $OP$  está colocado em frente de um espelho esférico côncavo. A posição da imagem  $O'P'$  será determinada através da equação dos espelhos, ou então através do traçado de raios no diagrama se se conhecer a posição do ponto focal do espelho. Assim, a posição do ponto imagem  $P'$  pode ser encontrada traçando simplesmente dois raios no diagrama, um raio com origem em

P dirigido ao centro de curvatura do espelho e outro raio também com origem em  $P$  paralelo ao eixo óptico. A imagem estará na intersecção dos raios reflectidos pelo espelho.

Todos os raios originários do objecto que passem pelo centro de curvatura incidem no espelho segundo a normal à superfície. Como da lei da reflexão, os ângulos incidente e reflectido têm que ser iguais, então o raio originado pela reflexão no espelho é reflectido também segundo a normal à superfície, donde obrigatoriamente o raio reflectido e o raio incidente têm a mesma direcção mas sentidos opostos. Por outro lado todos os raios paralelos ao eixo óptico (os quais podem ser considerados como provenientes do infinito), tal como visto acima, passam pelo ponto focal do espelho.

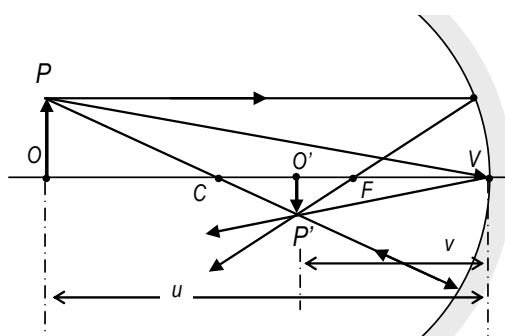


Figura 1- 22 Traçado de raios para formação da imagem de um objecto real em espelhos esféricos côncavos.

Na figura 1-23 apresenta-se a formação de imagens em espelhos esféricos côncavos e convexos. Nos espelhos convexos as imagens formadas são sempre direitas, menores e virtuais, nos espelhos côncavos as imagens podem ser reais ou virtuais, maiores ou menores, direitas ou invertidas.

Para caracterizar completamente uma imagem temos que conhecer a sua posição, para saber se é uma imagem real ou virtual, a sua orientação, para saber se é direita ou invertida e as suas dimensões, para saber se é maior ou menor do que o objecto que a originou.

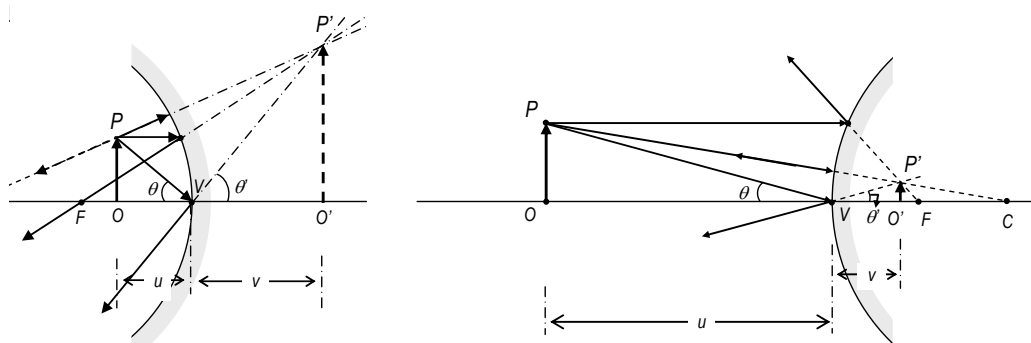


Figura 1- 23 Formação da imagem para espelhos esféricos côncavos e convexos.

Através do traçado de raios podemos geometricamente caracterizar a imagem, no entanto se quisermos uma resolução algébrica temos que recorrer à equação dos espelhos e a uma outra quantidade denominada ampliação lateral. A ampliação lateral é o módulo da razão entre a altura da imagem e a altura do objecto.

$$|m| = \frac{h'}{h}$$

mas da figura 1-23 tira-se que  $|m| = \frac{O'P'}{OP}$ .

Por outro lado conforme se pode deduzir da figura  $\tan \theta = OP/u$  e  $\tan \theta' = O'P'/v$  e que  $\theta = \theta'$ . Assim temos então que:

$$|m| = \frac{v \tan \theta'}{u \tan \theta} = \frac{v}{u}$$

tendo em atenção a convenção de sinais, a ampliação lateral é dada pela seguinte expressão válida para todos os tipos de espelhos:

$$m = -\frac{v}{u}$$

Do valor da ampliação lateral podemos concluir que:

- Se for negativo indica uma imagem invertida relativamente ao objecto.
- Se for positivo indica uma imagem direita relativamente ao objecto.
- Se em módulo for superior à unidade indica uma imagem maior que o objecto.
- Se em módulo for inferior à unidade indica uma imagem menor que o objecto.
- Se em módulo for igual à unidade indica que a imagem tem a mesma dimensão do objecto.

### 1.7.6 Curvatura e Vergência

Uma forma muito útil de estudar a formação da imagem originada de um objecto é, através da alteração da curvatura das frentes de onda, à medida que divergem de um ponto objecto e convergem para um ponto imagem. As frentes de onda originadas numa fonte pontual consistem num invólucro esférico, que se torna cada vez menos curvo à medida que se vai propagando no espaço para pontos mais distantes (ver figura 1-24). A curvatura expressa-se normalmente numa unidade recíproca do metro que é a dioptria, cujo símbolo é a letra D.

Uma frente de onda com 10 cm de raio tem uma curvatura de  $1/0.1$ , ou seja 10 D. Se a frente de onda é divergente, a partir de um ponto objecto, a sua curvatura é negativa (-10 D), se pelo contrário a frente de onda é convergente, em direcção a um ponto imagem, a sua curvatura é positiva (10 D). Esta escolha de sinais é consistente com a convenção de sinais adoptada para as distâncias objecto e imagem. Da figura 1-24 pode-se constatar que à medida que a distância  $r$  aumenta, a curvatura  $1/r$  da



frente de onda diminui de magnitude, aproximando-se de zero à medida que  $r$  se aproxima de infinito, sendo nesse caso a frente de onda uma onda plana.

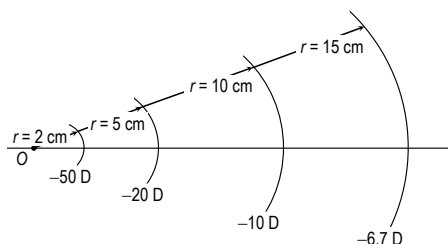


Figura 1- 24 Diminuição do raio de curvatura com a distância.

Retornando à equação dos espelhos e aplicando a noção de curvatura temos que,  $1/u$  é a curvatura da frente de onda à distância  $u$  da fonte pontual e  $1/v$  é a curvatura da frente de onda à distância  $v$  do ponto imagem. Definem-se estas curvaturas como vergências, sendo  $U = 1/u$  e  $V = 1/v$ . Como o sentido da luz é invertido no momento da reflexão, o sinal da curvatura associado ao ponto imagem é também invertido. Assim,  $V = -1/v$  para o caso da reflexão. Deste modo

$$U - V = \frac{2}{r} \quad \text{ou} \quad U - \frac{2}{r} = V$$

A segunda forma da equação é mais intuitiva, mostrando que a vergência inicial  $U$  da frente de onda no espelho é modificada pelo espelho para produzir a vergência final  $V$  no espelho. Esta modificação é devida à acção do espelho e é representada pelo termo  $-2/r$ , denominado potência do espelho  $F$ . Assim podemos escrever que,

$$U + F = V \quad \text{onde} \quad F = -\frac{2}{r}$$

Esta última equação, expressa em termos de vergências e da potência do espelho, é equivalente à equação dos espelhos descrita na secção 1.7.3. Para a ampliação lateral temos

$$m = -\frac{v}{u} = -\frac{1/u}{1/v} = -\frac{U}{-V} = \frac{U}{V}$$

## 1.8 Refracção em Superfícies Esféricas

### 1.8.1 Introdução: convenção de sinais e símbolos

Vamos relembrar mais uma vez a convenção de sinais a ser utilizada na refração da luz em superfícies esféricas. Desenhando um sistema de eixos cartesianos na superfície reflectora ou refractora, tal que a origem do sistema de eixos coincida com o vértice da superfície,  $V$ , teremos:

1. As distâncias imagem e objecto positivas para a direita do vértice  $V$  e negativas para a esquerda de  $V$ .
2. O raio de curvatura positivo quando o centro de curvatura  $C$  está à direita do vértice e negativo quando  $C$  está a esquerda de  $V$ .
3. As dimensões verticais positivas acima do eixo horizontal (eixo óptico) e negativas abaixo desse eixo.

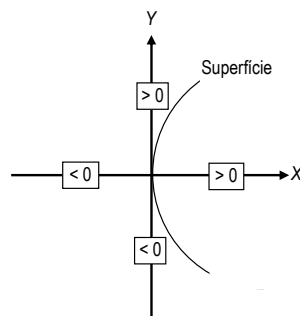


Figura 1- 25 Representação da convenção de sinais.

quanto aos símbolos utilizados eles são:

Índice de refração - $n$	Distância focal objecto - $f$	Altura do objecto - $h'$
Distância objecto - $u$	Distância focal imagem - $f'$	Raio de curvatura- $r$
Distância imagem - $v$	Altura do objecto - $h$	

As letras maiúsculas denotam a distância recíproca de uma distância, por exemplo:  $V = 1/v$  e  $R = 1/r$ , etc.

Números em subscrito identificam uma série de refrações ou reflexões sucessivas, por exemplo  $h'_2$  denota a altura da imagem depois da segunda refração ou reflexão.

### 1.8.2 A Equação das Superfícies de Refracção

Nesta secção vamos tratar do processo de refração em superfícies esféricas (também chamadas de dióptros esféricos). Para isso vamos observar o que se passa numa superfície côncava (figura 1-26).

Na figura apresentam-se dois raios que partem do ponto objecto  $O$ . Um é um raio axial normal à superfície no seu vértice e o segundo um raio não axial dirigido para o ponto  $P$ . O raio axial refracta-se sem mudar de direcção, enquanto que o raio não axial refracta-se alterando a sua direcção de incidência de acordo com a lei de Snell vista nas secções 1.2.3, 1.3 e 1.4.

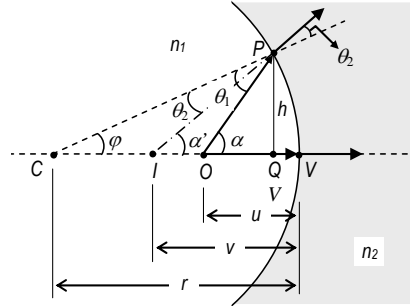


Figura 1- 26 Refracção numa superfície esférica concava.

Da figura 1-26 observa-se que os dois raios refractados são divergentes a partir da superfície, mas que os seus prolongamentos intersectam-se no ponto  $I$ . O ângulo externo do triângulo  $CPO$  é igual a  $\alpha = \theta_1 + \varphi$ , enquanto que para o triângulo  $CPI$  o ângulo externo é dado por  $\alpha' = \theta_2 + \varphi$ . Retornando à lei de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

e substituindo os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  pelas expressões obtidas a partir dos ângulos externos dos triângulos  $CPO$  e  $CPI$  temos:

$$n_1 \sin(\alpha - \varphi) = n_2 \sin(\alpha' - \varphi)$$

mas da aproximação paraxial temos

$$n_1(\alpha - \varphi) = n_2(\alpha' - \varphi)$$

e como  $\tan \alpha \approx \frac{h}{u}$ ,  $\tan \alpha' \approx \frac{h}{v}$ , e  $\tan \varphi \approx \frac{h}{r}$  vem

$$n_1 \left( \frac{h}{u} - \frac{h}{r} \right) = n_2 \left( \frac{h}{v} - \frac{h}{r} \right)$$

$$\frac{n_1}{u} - \frac{n_2}{v} = \left( \frac{n_1 - n_2}{r} \right).$$

Da convenção de sinais como todas as quantidades envolvidas ( $u$ ,  $v$  e  $r$ ) são negativas então a equação anterior fica

$$\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

a qual pode ser aplicada tanto a superfícies côncavas como convexas. Quando a superfície é plana  $r = \infty$  e

$$v = \left( \frac{n_2}{n_1} \right) u$$

Para um objecto real a distância objecto  $u$  é negativa e da equação anterior também a distância imagem,  $v$ , é negativa. Assim, a imagem encontra-se à esquerda da superfície de refacção sendo portanto uma imagem virtual.

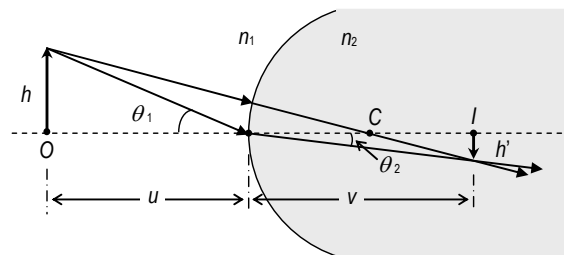


Figura 1- 27 Refracção numa superfície esférica convexa.

A ampliação lateral de um objecto extenso é determinada pela razão entre a altura do objecto e a altura da imagem, isto é,

$$m = h'/h$$

mas como  $\theta_1 = \frac{h}{u}$ ,  $\theta_2 = \frac{h'}{v}$  e  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ , vem que

$$m = \frac{n_1 v}{n_2 u}$$

Como da convenção de sinais utilizada,  $u$  é negativo e  $v$  é positivo, a ampliação lateral é negativa, indicando uma inversão da imagem, em acordo com o esquema da figura 1-27. Esta equação da ampliação lateral é geral podendo ser utilizada tanto em superfícies côncavas como em superfícies convexas.

Para superfícies planas como  $v = (n_2/n_1)u$ , então  $m = +1$ , indicando que a imagem formada por uma superfície de refração plana, tem a mesma dimensão e a mesma orientação do objecto (real, direita e igual ao objecto).

### 1.8.3 Formação da imagem em dioptrios esféricos

Tal como na secção 1.7.5 vamos assumir que os pontos que constituem o objecto estão suficientemente perto do eixo óptico para que a aproximação paraxial (ângulos pequenos) seja válida e que nos vários diagramas que serão apresentados, as alturas dos objectos são exageradas para maior clareza e melhor compreensão do esquema óptico.

Na figura 1-28 o objecto  $OP$  está colocado em frente de uma superfície de refração esférica convexa. A posição da imagem  $O'P'$  será determinada analiticamente através da equação dos dioptrios esféricos ou então geometricamente através do traçado de raios no diagrama. Para isso é necessário conhecer-se a posição dos pontos focais objecto e imagem da superfície de refração,

$$\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Se a imagem do ponto  $F$  (foco objecto) se formar no infinito então  $v = \infty$  e

$$\frac{n_2}{\infty} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Esta distância particular da superfície ao objecto é, por definição, a distância focal objecto, isto é,  $u \equiv f$ , logo:

$$f = \frac{n_1}{n_1 - n_2} r.$$

De um modo análogo, o foco imagem é o ponto  $F'$  onde se forma a imagem de um objecto no infinito ( $u = \infty$ ), isto é,

$$\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{\infty} = \frac{n_2 - n_1}{r}.$$

Esta distância da superfície à imagem é a distância focal imagem ( $f'$ ) que por definição é igual à distância imagem ( $v$ ).

$$f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r .$$

A posição do ponto imagem  $P'$  pode ser encontrada traçando simplesmente dois raios no diagrama. Normalmente os raios escolhidos são: (1) raio com origem em  $P$  e que passa pelo ponto focal objecto; (2) raio que é paralelo ao eixo óptico e (3) raio que tendo origem em  $P$  passa pelo centro de curvatura da superfície de refacção.

Todos os raios originários do objecto que passem pelo centro de curvatura incidem na superfície de refacção segundo a normal à superfície. Da lei de Snell os raios que incidam segundo a normal à superfície no ponto de incidência não sofrem nenhuma alteração de direcção (não são desviados). Por outro lado todos os raios que não incidam normalmente à superfície sofrem os efeitos da refacção, isto é, são desviados da sua direcção original. Assim, os raios provenientes do objecto que sejam paralelos ao eixo óptico (provenientes do infinito) são refractados passando pelo ponto focal imagem e os raios que passam pelo ponto focal objecto são refractados ficando paralelos ao eixo óptico (imagem no infinito).

A imagem  $O'P'$  do objecto  $OP$  formar-se-á na intersecção dos raios que são refractados para o interior da superfície de refacção. Um exemplo da formação da imagem em superfícies de refacção esféricas é apresentado na figura 1-28, onde se podem visualizar os três raios discriminados acima.

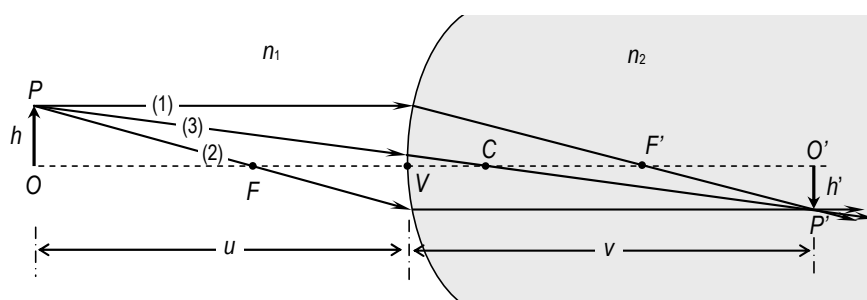


Figura 1- 28 Formação da imagem em dióptros esféricos.

### 1.8.4 Vergências na Refracção

O problema da refacção em superfícies esféricas pode ser também descrito através das curvaturas da frente de onda. Suponhamos um feixe luminoso a propagar-se da esquerda para a direita de um meio de índice de refacção  $n_1$  para um meio de índice de refacção  $n_2$  separados por uma interface esférica de raio  $r$ . Define-se  $U = n_1/u$ , como a vergência das frentes de onda originadas pela fonte e que chegam à superfície esférica. Do mesmo define-se  $V = n_2/v$ , como a vergência das frentes de onda na superfície esférica associadas à formação da imagem. Assim,

$$\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{r} \Rightarrow V - U = F \quad \text{ou} \quad U + F = V$$

com

$$F = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

A curvatura  $U$  da frente de onda objecto é modificada pela potência da superfície esférica para produzir a curvatura  $V$  da frente de onda imagem. Quanto à ampliação lateral, em termos de vergências, é expressa através da equação:

$$m = \frac{n_1 v}{n_2 u} = \frac{(n_1/u)}{(n_2/v)} = \frac{U}{V}$$

## 1.9 Lentes Finas

Uma lente é um componente óptico resultante da conjugação de duas superfícies esféricas de refração. Também se pode afirmar que uma lente é um elemento óptico que actua por refração, introduzindo descontinuidades no meio em que a luz se propaga inicialmente e que reconfigura a distribuição da energia transmitida, independentemente da frequência da luz.

A forma de uma lente esférica depende do tipo de superfícies de refração utilizadas. Existem vários tipos de lentes esféricas, resultado de superfícies de refração convexas, côncavas, planas e convexas, planas e côncavas, côncavas e convexas, etc., (figura 1-29). A designação que atribuímos a cada tipo de lente estará de acordo com as duas superfícies que a compõem, isto é, existem lentes biconvexas, bicôncavas, plano-convexas, plano-côncavas e os meniscos positivos e negativos. Os meniscos são lentes formadas por uma superfície convexa associada a uma superfície côncava. No entanto todas as lentes esféricas só podem ser de dois tipos: convergentes ou divergentes (positivas ou negativas).

A maioria das lentes tem duas ou mais interfaces de refração e no mínimo uma dessas interfaces é curva. De um modo geral as superfícies encontram-se centradas no eixo óptico. Essas superfícies são na sua maioria segmentos esféricos frequentemente revestidos com filmes dielétricos finos para controlar as suas propriedades de transmissão.

Uma lente que consista só de um elemento (duas superfícies de refração) é uma lente simples, a presença de mais de um elemento torna a lente composta. Para além disso uma lente também é classificada como fina ou espessa, dependendo se a sua espessura pode ser ou não desprezada, respectivamente.

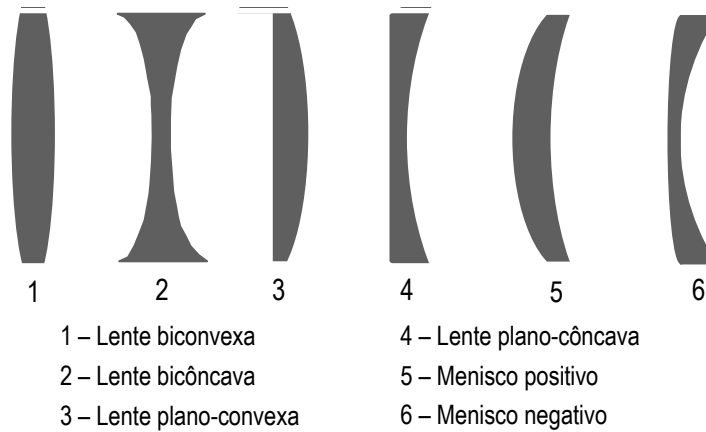


Figura 1- 29 Representação das diversas formas de lentes esféricas finas.

Nesta secção vamos admitir que podemos desprezar a espessura da lente quando comparada com as distâncias objecto e imagem, isto é, vamos admitir que as lentes são finas. Como uma lente é formada por duas superfícies de refacção, para obtermos uma equação que caracterize a lente vamos ter de aplicar duas vezes a equação das superfícies de refacção esféricas ou equação dos dioptrios esféricos (figura 1-30).

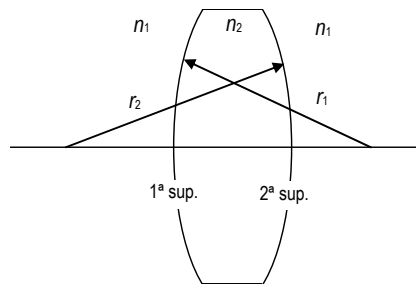


Figura 1- 30 Representação dos índices de refacção e raios de curvatura dos dioptrios de uma lente.

Assim, para a 1ª superfície de refacção com raio de curvatura  $r_1$  temos:

$$\frac{n_2}{v_1} - \frac{n_1}{u_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}$$

e para a 2ª superfície de refacção, de raio  $r_2$  temos:

$$\frac{n_1}{v_2} - \frac{n_2}{u_2} = \frac{n_1 - n_2}{r_2}$$

tendo-se assumido que a lente está imersa num meio de índice de refacção  $n_1$ .

Da figura 1-31 podemos ver que



$$u_2 = v_1 - t$$

onde  $t$  é a espessura da lente. Se admitirmos que a lente da figura 1.31 é uma lente fina, não entramos em consideração com a espessura da lente (espessura nula) e então  $u_2 = v_1$ . Substituindo na equação relativa à 2ª superfície de refração vem:

$$\frac{n_1}{v_2} - \frac{n_2}{v_1} = \frac{n_1 - n_2}{r_2}$$

donde,

$$\frac{n_2}{v_1} = \frac{n_1}{v_2} - \frac{n_1 - n_2}{r_2}$$

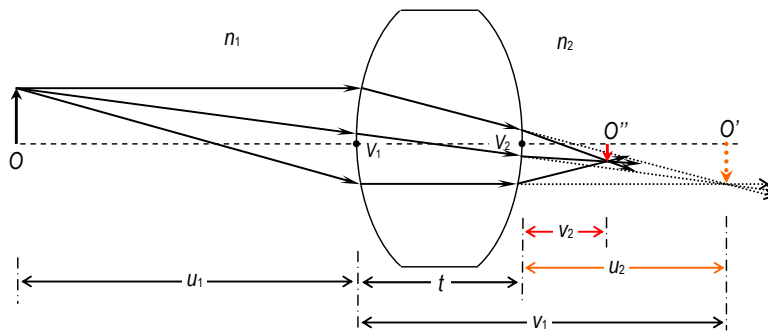


Figura 1- 31 Formação da imagem de um objecto (seta) por uma lente espessa.

Substituindo a expressão anterior na equação relativa à 1ª superfície de refração vem:

$$\frac{n_1}{v_2} - \frac{n_1 - n_2}{r_2} - \frac{n_1}{u_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} \quad \text{donde}$$

$$\frac{n_1}{v_2} - \frac{n_1}{u_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_1 - n_2}{r_2} \quad \text{ou seja}$$

$$\frac{n_1}{v_2} - \frac{n_1}{u_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1 - r_2} \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{v_2} - \frac{1}{u_1} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

onde  $u_1$  é a distância objecto original e  $v_2$  é a distância imagem final. Como estamos a considerar uma lente fina podemos retirar os sub-índices das distâncias objecto e imagem e simplificar a equação anterior. Então temos

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Como a distância focal de uma lente fina é definida como a distância imagem para um objecto no infinito, isto é,  $v = f'$  e  $1/u = 0$ , temos

$$\frac{1}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

A distância focal pode também ser definida como a distância objecto para um objecto no infinito, onde  $u = f$  e  $1/v = 0$ , obtendo-se a distância  $f$  (conforme se pode observar na figura 1-33 mais adiante). A distância focal  $f$  é chamada distância focal objecto ou primeira distância focal e a distância focal  $f'$  é a distância focal imagem ou segunda distância focal. Para lentes finas  $f = f'$ .

Para as lentes convergentes (figura 1-32 (a)) os raios que partem do ponto focal objecto (a tracejado) depois de atravessarem a lente ficam paralelos ao eixo óptico, enquanto que os raios paralelos ao eixo óptico (a cheio) depois de atravessarem a lente convergem para o ponto focal imagem.

Para as lentes divergentes (figura 1-32 (b)) os raios paralelos ao eixo óptico (a cheio) depois de atravessarem a lente divergem de tal forma que os seus prolongamentos se cruzem no ponto focal objecto, enquanto que os raios que incidam na lente de tal forma que os seus prolongamentos se cruzem no ponto focal imagem (a tracejado) depois de atravessarem a lente tornam-se paralelos ao eixo óptico.

A equação anterior é chamada equação dos fabricantes de lentes, porque dá o valor da magnitude da distância focal (logo também a potência) de uma lente fabricada com um determinado índice de refração e raios de curvatura a ser utilizada num determinado meio  $n_1$ .

Na grande maioria dos casos o meio é o ar donde  $n_1 = 1$ . Em termos da distância focal a equação das lentes finas vem:

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

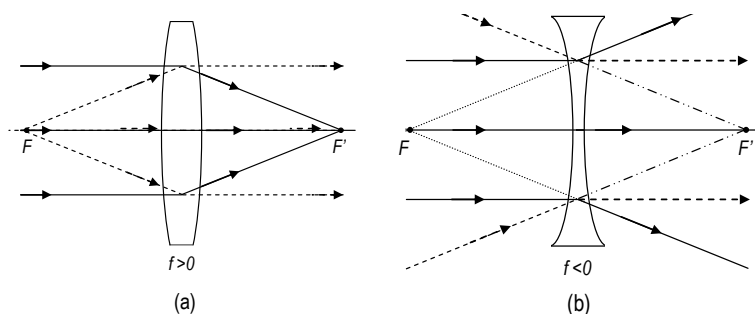


Figura 1- 32 Representação da distância focal objecto e imagem para lentes convergentes (a) e divergentes (b).

Nas lentes finas como desprezamos a sua espessura (espessura nula), a representação é feita através de uma linha vertical em que as arestas sugerem a forma da lente. Para lentes convergentes ou positivas as arestas têm a forma de setas a apontar para o exterior, enquanto que para lentes divergentes ou negativas as arestas têm a forma de setas a apontar para o centro da linha (figura 1-33).

Tal como visto na secção 1.8.3, também nas lentes finas o traçado de raios para determinar a posição da imagem é feito com base em três raios: um raio paralelo ao eixo óptico que depois de atravessar a lente passa pelo ponto focal imagem, um raio que passa pelo ponto focal objecto e que depois da lente sai paralelo ao eixo óptico e um raio dirigido ao centro da lente que não sofre alteração de direcção. Os traçados de raios para lentes convergentes e divergentes podem ser vistos na figura 1-33 no caso de um objecto real e na figura 1.34 para um objecto virtual.

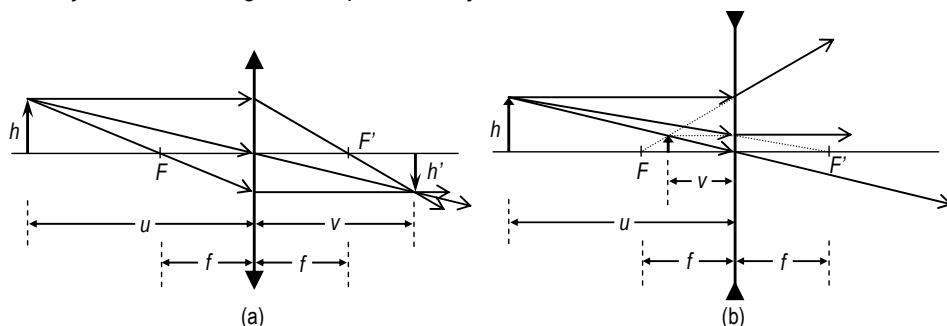


Figura 1- 33 Traçado de raios na formação da imagem em lentes finas convergentes e divergentes para objectos reais.

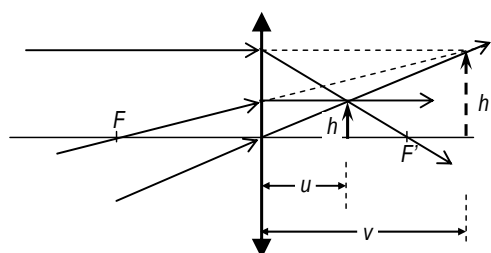


Figura 1- 34 Traçado de raios na formação da imagem em lentes finas convergentes para objectos virtuais.

Observando as figuras anteriores podemos concluir que

$$\frac{h}{u} = \frac{h'}{v}$$

donde a ampliação lateral vem

$$m = \frac{h}{h'} = \frac{v}{u}$$

### 1.9.1 Sistemas de lentes finas

A maior parte dos instrumentos ópticos são constituídos por mais de uma lente e quase todos têm os seus componentes (lentes) centrados num único eixo (eixo óptico). Isto quer dizer que a posição e tamanho da imagem final formada pelo sistema óptico pode ser determinada através da equação das lentes finas ou através do traçado de raios para cada lente. A imagem formada por uma lente torna-se o objecto (real ou virtual) para a lente a seguir e assim sucessivamente para cada lente que constitua o sistema (figura 1-35). Para cada uma das lentes temos, respectivamente,

$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{f_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{v_2} - \frac{1}{u_2} = \frac{1}{f_2} \quad \text{etc.}$$

Se as lentes estiverem em contacto (sem espaçamento entre elas)  $u_2 = v_1$ ,  $u_3 = v_2$ , etc. No caso de duas lentes finas em contacto teremos

$$\frac{1}{v_2} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad \text{ou seja}$$

$$\frac{1}{v_2} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{f_{eq}} \quad \text{com}$$

$$\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

No caso geral para  $N$  lentes finas em contacto virá:

$$\frac{1}{v_N} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots + \frac{1}{f_N} \quad \text{donde}$$

$$\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \dots + \frac{1}{f_N}$$

Sendo  $f_{eq}$  a distância focal equivalente do conjunto de lentes.

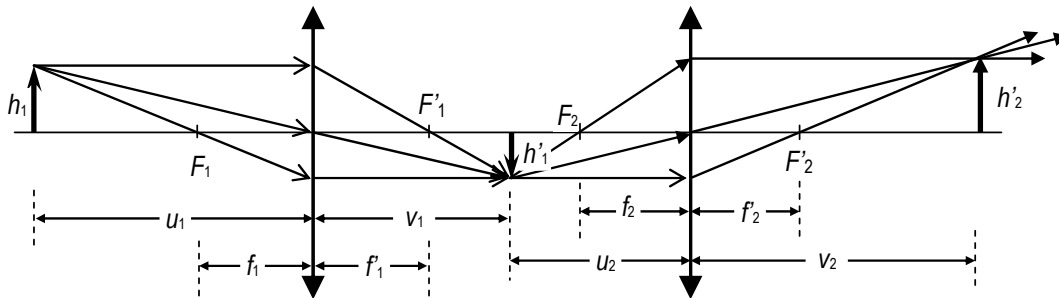


Figura 1- 35 Formação da imagem de um objecto por um sistema de lentes finas convergentes.

## 1.9.2 Vergências para lentes finas

Para chegar à equação da vergência para as lentes finas, podemos fazer uso do facto de que a potência de uma lente como um todo, ser a soma das potências das duas superfícies. Se a lente é fina, estamos a admitir que a curvatura da frente de onda não varia apreciavelmente na espessura dessa lente. Assim e tendo em conta as equações da secção 1.8.4, podemos escrever que a vergência objecto na 1ª superfície, mais as potências das 1ª e 2ª superfícies são iguais à vergência imagem na segunda superfície, isto é,

$$U + P_1 + P_2 = V$$

Vamos assumir o caso mais geral em que o espaço objecto tem um índice de refração  $n_1$ , a lente um índice de refração  $n_2$  e o espaço imagem um índice de refração  $n_3$ . Nesta situação teremos

$$U = \frac{n_1}{u}; \quad F_1 = \frac{n_2 - n_1}{r_1}; \quad F_2 = \frac{n_3 - n_2}{r_2}; \quad \text{e } V = \frac{n_3}{v}$$

e

$$\frac{n_1}{u} + \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} = \frac{n_3}{v}$$

donde

$$F = F_1 + F_2 = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2}$$

e

$$F = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2}$$

No entanto regra geral a lente está inserida num único meio, ou seja,  $n_1 = n_3$  e então a potência da lente equivalente será dada por

$$F = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_1 - n_2}{r_2} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Da secção 1.9 sabemos que  $\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$  que é a equação dos fabricantes de lentes. Das últimas duas equações resulta que

$$\frac{1}{f} = \frac{F}{n_1} \quad \text{donde} \quad f = \frac{n_1}{F}$$

Quanto à ampliação lateral temos

$$m = \frac{v}{u} = \frac{1/u}{1/v} = \frac{n_1 n_3}{n_1 n_3} \times \frac{1/u}{1/v} = \frac{n_3 (n_1/u)}{n_1 (n_3/v)} = \frac{n_3 U}{n_1 V}$$

Quando a lente estiver inserida num só meio vem simplesmente  $m = U/V$ .

### 1.9.3 Equação Newtoniana para lentes finas

Quando as distâncias objecto e imagem são medidas relativamente aos pontos focais da lente (ponto focal objecto e ponto focal imagem), temos que obter uma forma alternativa para a equação das lentes finas, chamada forma Newtoniana.

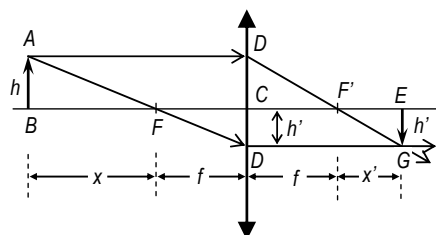


Figura 1- 36 Representação das várias distâncias utilizadas na equação Newtoniana das lentes finas.

Como podemos ver da figura 1-36, os triângulos  $ABF$  e  $FCD$  têm um ângulo em comum, resultando que  $\frac{h}{x} = \frac{h'}{f}$ .

Do mesmo modo para os triângulos  $DCF'$  e  $F'EG$  vem

$$\frac{h}{f} = \frac{h'}{x'}$$

Temos então que

$$\frac{h'}{h} = \frac{f}{x} \quad \text{e} \quad \frac{h'}{h} = \frac{x'}{f}$$

Como a ampliação lateral é em valor absoluto, a razão entre o comprimento da imagem relativamente ao comprimento do objecto, vem que

$$|m| = \frac{h'}{h} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f}.$$

Como na figura 1-36 a imagem está invertida, então a ampliação lateral tem de ser negativa, donde,

$$-\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f}$$

e

$$xx' = f^2$$

que é a equação Newtoniana para as lentes finas.

# Capítulo 2

## Superfícies Ópticas Não Esféricas

---

### 2.1 Introdução

Tudo o que foi tratado até aqui foi relativo a superfícies esféricas. Mesmo as superfícies planas podem ser consideradas esféricas com raio de curvatura infinito. As superfícies esféricas são muito comuns em óptica, uma vez que são mais fáceis de serem produzidas. As superfícies não esféricas são mais difíceis de serem produzidas. As superfícies não esféricas podem ter várias formas as quais serão descritas neste capítulo.

As lentes esféricas são caracterizadas por ter simetria esférica, isto é, se a lente for rodada de um ângulo arbitrário em torno do seu eixo de simetria não apresenta nenhuma alteração. Como a orientação das curvaturas da superfície não mudou, as suas características ópticas permanecem inalteradas. No entanto se o raio de curvatura de uma ou de ambas as superfícies variar ao longo de diferentes secções transversais da lente, ela perde a sua simetria esférica. Em particular as lentes cilíndricas têm uma forma semelhante a um cilindro cortado ao meio, em que uma superfície é plana e a outra tem uma secção transversal semi-circular.

Uma lente deste tipo tem propriedades de focagem assimétricas. Enquanto que uma lente circular produz um ponto imagem de um ponto objecto, uma lente cilíndrica produz uma linha imagem de um ponto objecto. Devido às suas propriedades, as lentes esféricas dizem-se estigmáticas e as lentes cilíndricas dizem-se astigmáticas. Como é evidente, tais lentes são úteis na correcção do defeito de visão chamado astigmatismo.



## 2.2 Superfícies toroidais e cilíndricas

Se uma lente em forma de menisco for comprimida verticalmente, a superfície é distorcida da forma esférica. Vai existir um aumento na curvatura na direcção vertical mas ao mesmo tempo um aplanamento na direcção horizontal. A superfície fica então com dois eixos de curvatura diferentes, correspondentes aos eixos de curvatura máxima e mínima perpendiculares entre si. Este tipo de superfície é chamada superfície toroidal (figura 2-1).

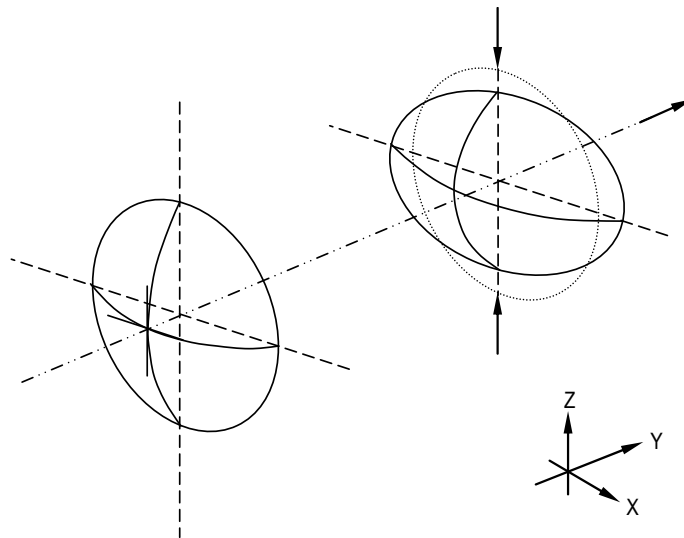


Figura 2- 1 Superfície esférica versus superfície toroidal. Representação do eixo vertical e horizontal de uma lente toroidal.

Uma superfície cilíndrica é uma superfície onde um dos eixos não tem curvatura (é plano). Na figura 2-2 apresentam-se superfícies cilíndricas e superfícies toroidais.

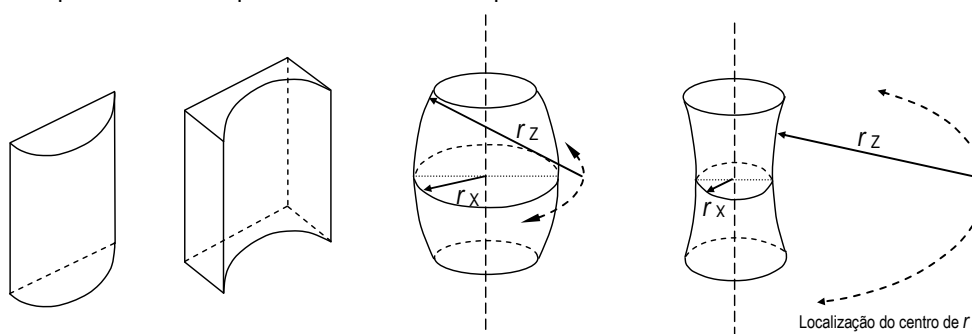


Figura 2- 2 Representação de superfícies cilíndricas, versus superfícies toroidais.

As orientações que contêm as curvaturas máximas são chamadas meridianos principais. No caso das lentes cilíndricas o eixo do cilindro é paralelo ao meridiano principal o qual tem curvatura nula. Este meridiano é conhecido como meridiano do eixo ou simplesmente eixo do cilindro. O meridiano

perpendicular ao eixo do cilindro, que é o meridiano principal contendo a curvatura e portanto a potência da lente, é conhecido como meridiano de potência ou contra-eixo. (figura 2-3).

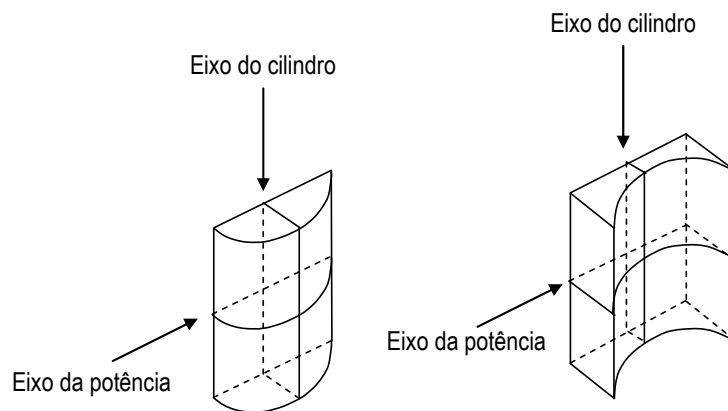


Figura 2- 3 Representação dos eixos do cilindro e da potência em superfícies cilíndricas convergentes e divergentes.

Se partíssemos os cilindros segundo os dois eixos, teríamos o que se apresenta na figura 2-4.

Observando as figuras anteriores podemos então concluir então que a potência está sempre no eixo da potência ou contra-eixo e que no eixo do cilindro nunca existe potência. Por isso ao rodarmos uma lente cilíndrica a imagem deforma-se quando passamos de um meridiano a outro.

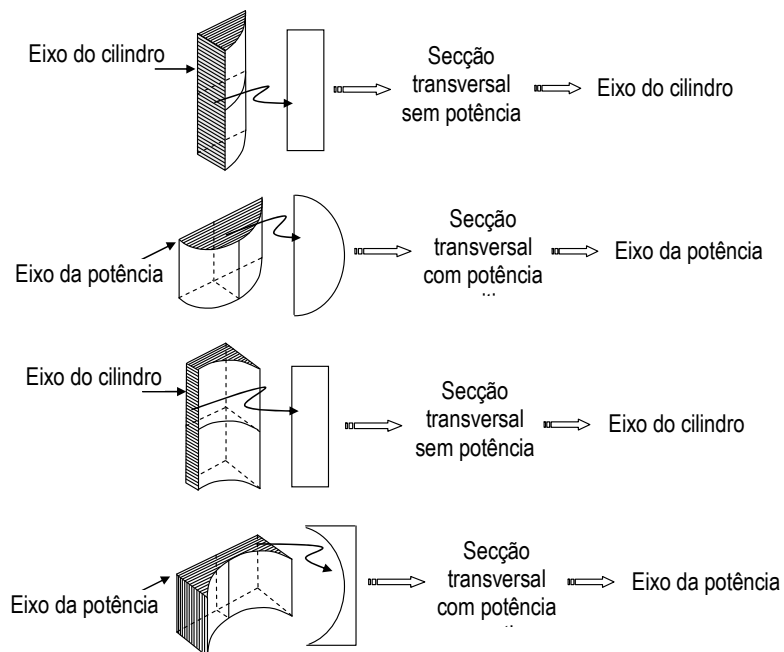


Figura 2- 4 Representação em pormenor dos eixos do cilindro e da potência em superfícies cilíndricas convergentes e divergentes.

Cada raio de luz que incida numa lente cilíndrica só sofre refração no meridiano de potência. O resultado deste processo de refração, é que a imagem de um ponto objecto é uma linha paralela ao eixo do cilindro, isto é, paralela ao meridiano de potência nula da lente, figura 2-5.

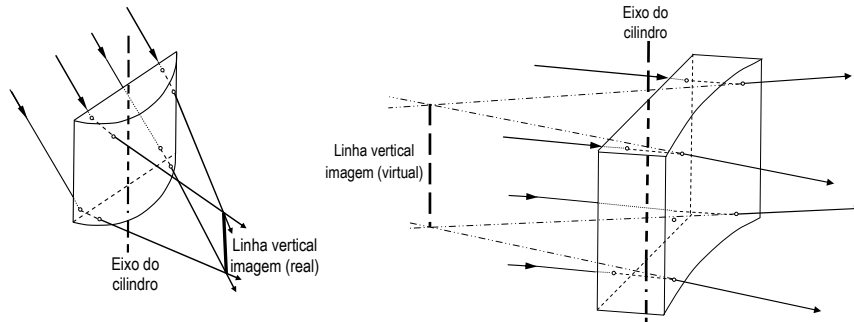


Figura 2- 5 Esquema da refração em lentes cilíndricas convergentes e divergentes com a formação da imagem (real e virtual) de uma linha objecto no infinito.

Para uma superfície toroidal os dois meridianos principais têm potência, ao contrário do que acontece nas superfícies cilíndricas. O resultado é a formação de duas linhas nos pontos focais imagem. Este mesmo efeito pode ser obtido através da composição de uma lente esférica com uma lente cilíndrica, ou então através da composição de duas lentes cilíndricas com os eixos dos dois cilindros perpendiculares (chamado cilindros cruzados), figura 2-6.

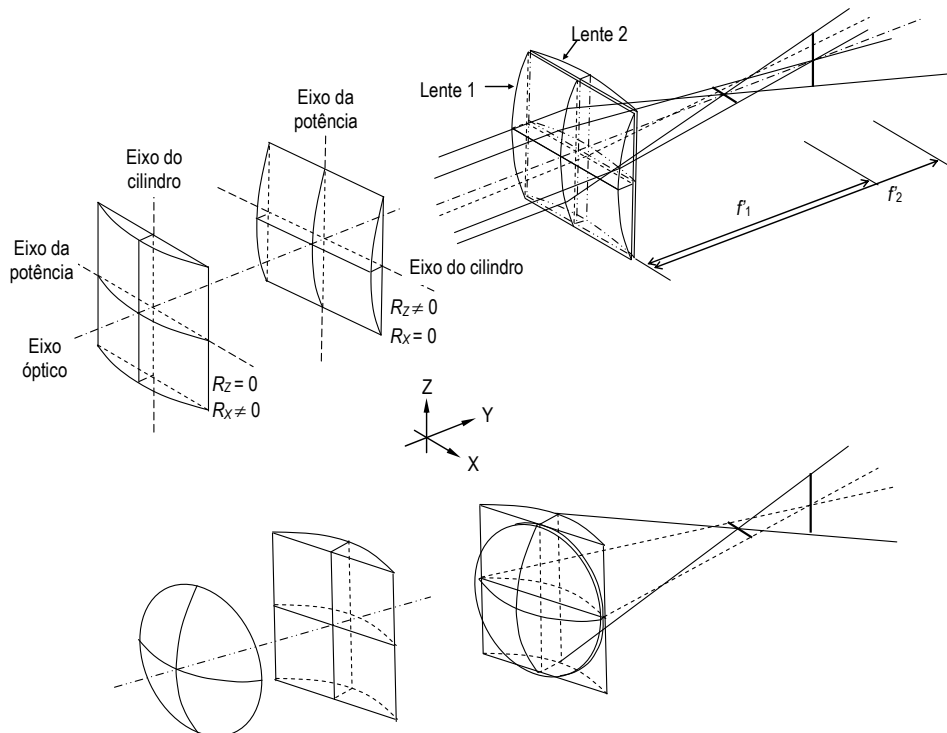


Figura 2- 6 Construção de lentes toroidais através da composição de uma lente esférica com uma lente cilíndrica, ou então através da composição de duas lentes cilíndricas com os eixos dos dois cilindros perpendiculares (chamado cilindros cruzados).

No caso da combinação de duas lentes cilíndricas, como cada uma das lentes não tem potência no meridiano de potência da outra lente as duas linhas imagem estão localizadas independentemente uma da outra. Qualquer variação na potência de uma das lentes cilíndricas não afectará a localização da outra linha imagem. Os valores das potências nos meridianos principais determinam as distâncias onde as linhas imagem são formadas. Embora a superfície toroidal tenha curvaturas diferentes em meridianos oblíquos ela não tem potência efectiva a não ser nos meridianos principais.

## **2.3 Lentes oftálmicas**

A óptica oftálmica é a que mais utiliza superfícies toroidais e a que desenvolveu uma terminologia própria. O termo tórica deve ser usado para lentes e não para superfícies. As superfícies toroidais são aquelas para as quais as curvaturas nos seus meridianos principais são arcos de círculo. As superfícies apresentadas na figura 2-3 satisfazem esta definição, ao passo que as superfícies distorcidas da figura 2-1 não podem ser consideradas como toroidais. Embora o olho humano raramente apresente astigmatismo, com a forma simétrica de uma superfície toroidal ou cilíndrica, a visão de muitas pessoas pode ser melhorada com a utilização de lentes com uma componente cilíndrica, que corrijam a componente cilíndrica existente nos olhos.

Um feixe de raios luminosos procedentes de um ponto objecto axial, que atravesse uma lente astigmática de potência positiva em ambos os meridianos, não vai formar um ponto imagem. Pelo contrário, vão existir duas posições, ou dois pontos de focagem, correspondentes aos pontos focais dos dois meridianos principais onde os raios luminosos se cruzam, obtendo-se duas linhas imagem a partir de um ponto objecto axial (figura 2-7). Se a abertura da lente é circular, a secção transversal do feixe emergente a partir da lente astigmática, é ao princípio uma elipse com o seu eixo maior paralelo ao eixo do cilindro, diminuindo de largura até se tornar uma linha paralela ao eixo do cilindro em  $B'_\alpha$ . A seguir a secção transversal do feixe torna-se circular em  $B'_Z$  (círculo de confusão mínima), retornando a uma elipse com eixo maior perpendicular ao eixo do cilindro a partir desse ponto e daí degenerando para uma linha perpendicular ao eixo do cilindro em  $B'_\beta$ . Na posição correspondente ao círculo de confusão mínima, o feixe de luz apresenta a menor secção transversal. As propriedades de um feixe astigmático foi estudado por Sturm, matemático do séc. XIX, donde à forma do feixe apresentado na figura 2-7 chamar-se conoide de Sturm e à distância entre as linhas focais chamar-se intervalo de Sturm.

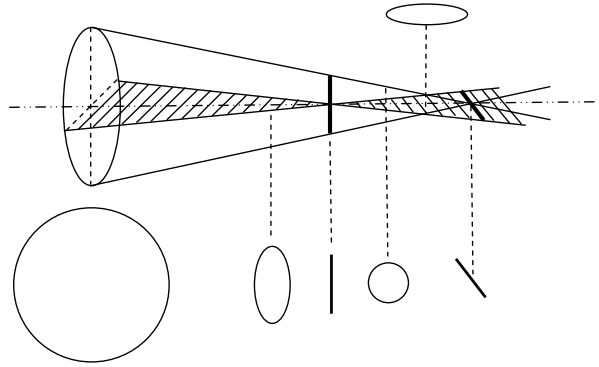


Figura 2- 7 Feixe astigmático de Sturm (intervalo de Sturm). Representação das secções e linhas de focagem numa lente astigmática.

### 2.3.1 Lentes cilíndricas

Para se corrigirem os olhos que apresentam miopia utilizam-se lentes oftálmicas de potência negativa. Pode então acontecer que algumas lentes oftálmicas apresentem potência positiva num dos meridianos principais e potência negativa no outro meridiano principal (que está desfasado de 90°), potência positiva nos dois meridianos principais, ou ainda potência negativa nos dois meridianos principais.

A posição das linhas focais é encontrada através da aplicação da expressão dos focos conjugados a cada um dos meridianos em particular. Em termos de vergências a expressão dos focos conjugados é dada por  $V = U + F$ , onde  $V$  é a vergência imagem,  $U$  a vergência objecto e  $F$  a potência do meridiano em questão. Para se determinar as dimensões das linhas focais e a posição do círculo de confusão mínima, é conveniente representar as secções do feixe nos dois meridianos principais num só plano (figura 2-8). As dimensões das duas linhas focais, em termos de vergências, são dadas por:

$$l_1 l'_1 = DD' \left( \frac{V'_1 - V'_2}{V'_1} \right)$$

$$l_2 l'_2 = DD' \left( \frac{V'_1 - V'_2}{V'_2} \right)$$

onde  $l_1 l'_1$  corresponde à dimensão da 1ª linha focal,  $l_2 l'_2$  corresponde à dimensão da 2ª linha focal,  $DD'$  corresponde ao diâmetro da lente,  $V'_1$  corresponde à vergência imagem para a 1ª linha focal e  $V'_2$  corresponde à vergência imagem para a 2ª linha focal.

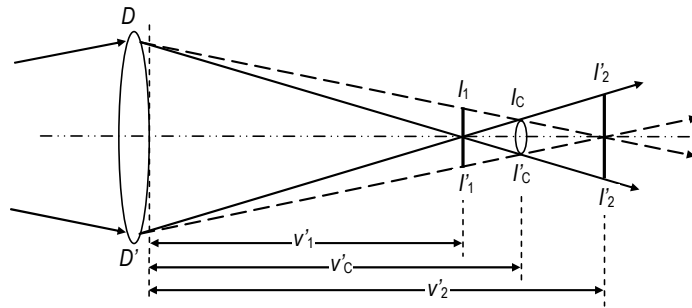


Figura 2- 8 Representação do feixe astigmático num plano. Linhas focais e posição do círculo de confusão mínima numa lente astigmática.

A posição e o diâmetro do círculo de confusão mínima são dadas pelas expressões apresentadas abaixo, onde  $DD'$  corresponde ao diâmetro da lente,  $V_1'$  corresponde à vergência imagem para a 1ª linha focal,  $V_2'$  corresponde à vergência imagem para a 2ª linha focal,  $V_c'$  corresponde à vergência imagem para o círculo de confusão mínima e  $z$  é o diâmetro do círculo de confusão mínima.

$$z = DD' \left( \frac{V_1' - V_2'}{V_1' + V_2'} \right)$$

A natureza da imagem formada por uma lente tórica com meridianos principais na vertical e na horizontal pode ser vista na figura 2-9.



Figura 2- 9 Representação das imagens observadas nas linhas focais vertical e horizontal.

De notar que as linhas que aparecem focadas em cada uma das imagens são perpendiculares aos meridianos que as geram (meridianos que focam os raios no ponto onde se forma a linha). Assim, as linhas produzidas são sempre perpendiculares aos meridianos que as geram (ver figura 2-10). Para uma lente cilíndrica a potência vem dada por

$$F = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

onde  $F$  é a potência da lente cilíndrica,  $n_1$  e  $n_2$  são os índices de refração do meio e da lente, respectivamente e  $r$  é o raio de curvatura do meridiano da potência.

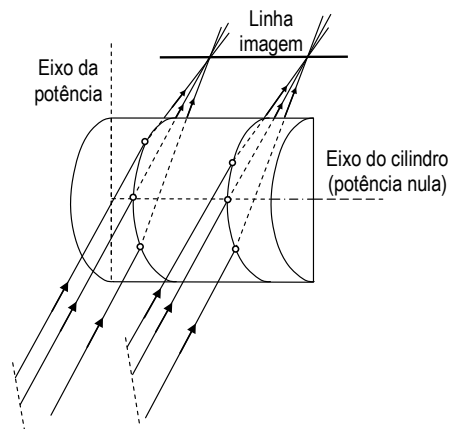


Figura 2- 10 Visualização da perpendicularidade entre as linhas focais produzidas e os meridianos que as geram.

Até aqui vimos lentes cilíndricas cujos eixos eram horizontais ou verticais. É claro que o eixo do cilindro pode ser um ângulo qualquer. Um olho com astigmatismo pode ter o eixo vertical, horizontal ou um ângulo entre os dois.

De uma forma geral temos que saber determinar o efeito da combinação de duas lentes cilíndricas com eixos arbitrários, ou de uma lente esférica com uma lente cilíndrica. Duas lentes cilíndricas associadas (lente bicilíndrica) produzem o mesmo efeito que a combinação de uma lente esférica com uma lente cilíndrica (lente esfero-cilíndrica). As lentes que se prescrevem para a correção dos defeitos da visão são expressas em termos de combinações de superfícies esféricas e superfícies cilíndricas.

Para se especificar um meridiano, utiliza-se o sistema TABO que mede os ângulos no sistema anti-horário. O ângulo correspondente ao meridiano será o que o meridiano faz com o eixo horizontal (ver figura 2-11).

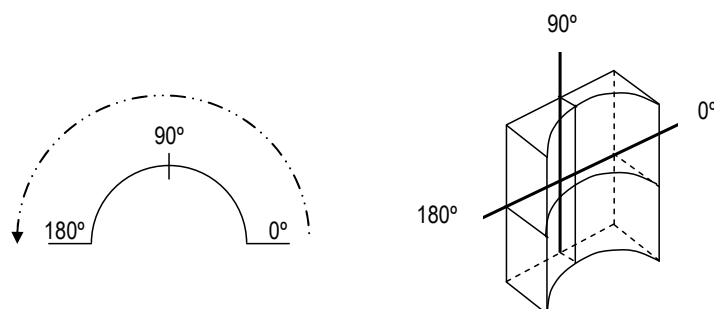


Figura 2- 11 Representação do sistema de medição angular de um determinado meridiano. Sistema TABO.

O sistema de coordenadas é o que é visto pelo examinador e não pelo paciente. Olhando para os olhos do indivíduo examinador especifica a orientação angular do cilindro de acordo com o esquema da figura 2-12.

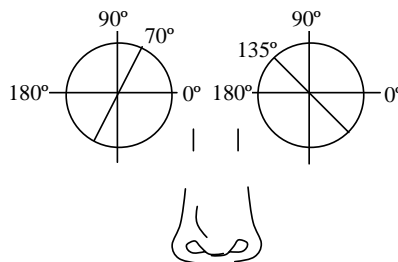


Figura 2- 12 Representação em pormenor do sistema de coordenadas para orientação angular do cilindro de acordo com o sistema TABO.

Como o eixo da potência é perpendicular ao eixo do cilindro, ambas as orientações podem ser marcadas simbolicamente num sistema de eixos cruzados tal como se pode ver na figura 2-13.

Na cruz de potências da figura 2-13 (a) temos  $+4.00 \times 90^\circ$ , definindo um eixo do cilindro a  $90^\circ$  e perpendicular a ele um eixo com uma potência de  $+4.00D$ . Na parte inferior pode observar-se a lente cilíndrica correspondente. Nos outros exemplos temos dois cilindros, um negativo e um positivo, com eixos a  $30^\circ$  e a  $150^\circ$  e potências  $-2.00D$  e  $+3.00D$ , respectivamente. Quando o eixo do cilindro estiver na horizontal a lente cilíndrica será especificada com um eixo de  $180^\circ$  em vez de  $0^\circ$  para evitar confusões entre  $0^\circ$  e potência 0.

Uma forma alternativa de especificar a orientação do eixo do cilindro é através da especificação do eixo da potência. Nesse caso símbolo @ é utilizado para eixo da potência. Nos exemplos da figura 2-13 teríamos então  $+4.00@180^\circ$ ,  $-2.00@120^\circ$  e  $+3.00@60^\circ$ .

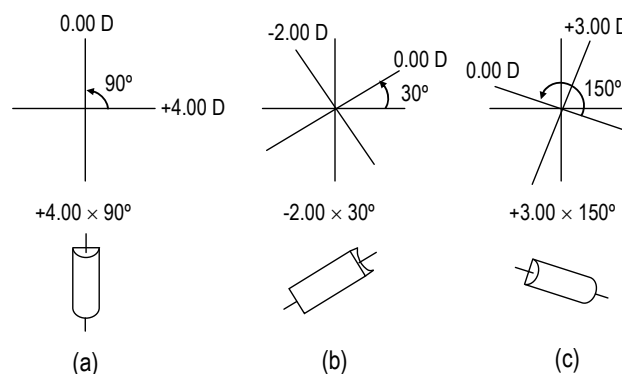


Figura 2- 13 Representação de vários eixos para três lentes cilíndricas com inclinações diferentes.

### 2.3.2 Lentes esfero-cilíndricas

As lentes esfero-cilíndricas resultam da composição de uma lente esférica com uma lente cilíndrica. Dessa junção resulta que uma lente esfero-cilíndrica apresenta potência em ambos os meridianos,



embora o valor das potências sejam diferentes para os dois meridianos. As lentes esfero-cilíndricas podem facilmente diferenciar-se de uma lente esférica devido às suas características. Para uma lente esférica a distância ao centro de curvatura (raio de curvatura) é constante e igual em todos os meridianos, não existindo meridianos principais nas lentes esféricas uma vez que são todos semelhantes e com a mesma potência. Disto resulta que uma lente esférica apresenta espessura constante ao longo do bordo da lente. Dentro das lentes esféricas, as lentes positivas diferenciam-se das lentes negativas devido à sua geometria. As lentes positivas são mais espessas no centro do que nos bordos, enquanto que as lentes negativas são mais espessas nos bordos que no centro (figura 2-14).

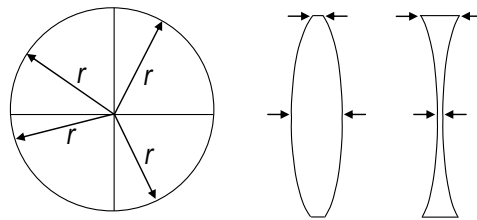
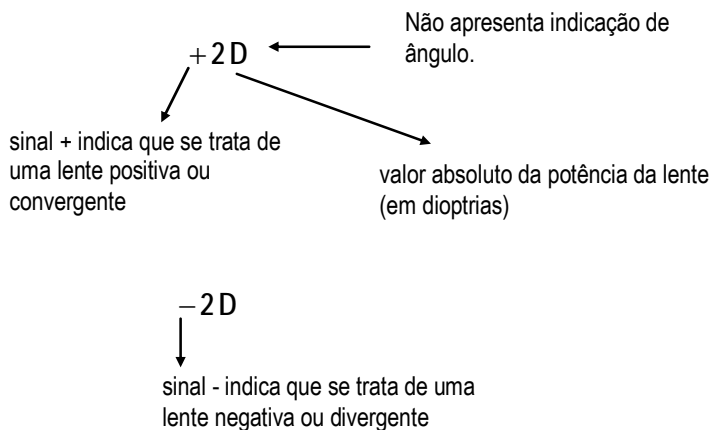


Figura 2- 14 Representação da geometria de lentes esféricas positivas ou convergentes e negativas ou divergentes (bordos mais finos que o centro lentes positivas, bordos mais grossos que o centro lentes negativas).

As lentes esféricas apresentam a seguinte notação:

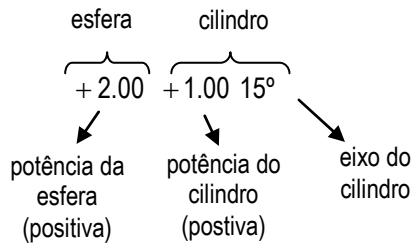


Rodando uma lente esférica em torno do seu centro, a imagem formada não sofre alterações, no entanto, deslocando uma lente negativa segundo uma determinada direcção a imagem formada pela lente acompanha o movimento da lente (o movimento da imagem é no mesmo sentido da lente), este é chamado movimento *COM*. Nas lentes positivas o deslocamento da lente e o movimento da imagem são em sentidos opostos. É o chamado movimento *CONTRA*. Os movimentos *COM* e *CONTRA* são uma forma rápida e expedita de se identificar se a lente é positiva ou negativa.

Relativamente às lentes esfero-cilíndricas resultam da composição de uma lente esférica (positiva ou negativa) com uma lente cilíndrica (positiva ou negativa). Assim, as lentes cilíndricas têm potência nos dois meridianos principais. Como a potência é diferente em cada um dos meridianos a curvatura também é diferente, donde a espessura no bordo de uma lente esfero-cilíndrica não é constante como nas

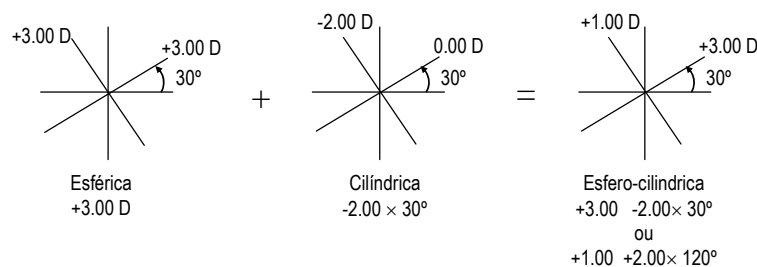
esféricas, variando quando se passa de um meridiano a outro. No entanto tal como para as lentes esféricas as esfero-cilíndricas quando são positivas apresentam movimento *CONTRA* e no caso de serem negativas apresentam movimento *COM*.

Para descrevermos uma lente esfero-cilíndrica temos que descrever a parte esférica, a parte cilíndrica e o eixo associado ao cilindro. A notação para as lentes esfero-cilíndricas é,

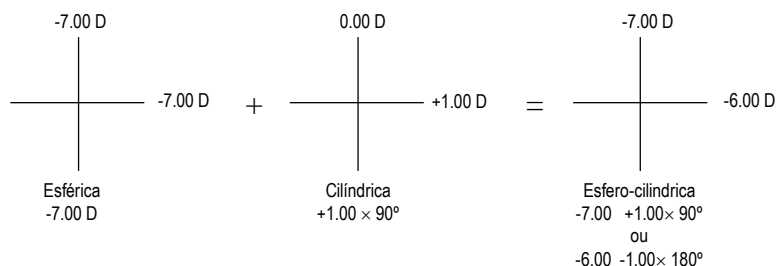


Tal como para as lentes cilíndricas uma lente esfero-cilíndrica também pode ser representada num sistema de eixos cruzados. Na representação de uma tal lente, temos que ter em atenção que a potência esférica tem estar obrigatoriamente nos dois meridianos e que a potência cilíndrica só estará num dos meridianos (no da potência). Exemplos de representações deste tipo de lentes são apresentados abaixo.

- Associação de uma lente esférica positiva de  $+3.00$  D com um cilindro negativo de potência  $-2.00$  D com eixo a  $30^\circ$ .



- Associação de uma lente esférica de  $+7.00$  D com um cilindro  $+1.00 \times 90^\circ$ .



As lentes esféricas são caracterizadas por terem a mesma potência em qualquer eixo. Assim, no primeiro exemplo como o eixo do cilindro está orientado a  $30^\circ$  representou-se a lente esférica também segundo os eixos de  $30^\circ$  e  $120^\circ$ , para de seguida se poder efectuar, de uma forma simples, a adição das potências meridiano a meridiano. O passo seguinte será escrever a lente esfero-cilíndrica segundo a notação descrita acima (parte esférica e parte cilíndrica). Para isso observem-se os exemplos anteriores. Na cruz final a potência de um dos meridianos é relativa só à potência esférica porque é somada com

potência nula do meridiano corresponde do cilindro, enquanto a potência do outro meridiano diz respeito à soma da potência da esfera mais a potência do cilindro nos meridianos correspondentes.

Supondo que não conhecemos as lentes em questão temos duas hipóteses para chegar à notação esfero-cilíndrica: ou escolhemos a potência mais positiva para potência da lente esférica (suponhamos  $F_1$ ) ou escolhemos a potência mais negativa para a potência esférica (suponhamos  $F_2$ ). Dependendo da nossa escolha a potência do outro meridiano (que não foi escolhido para esfera) será então a soma da potência esférica e da potência cilíndrica, isto é,

- 1º Caso: Se  $F_1$  for a potência esférica ( $F_1 = F_{Esf}$ ), então  $F_2 = F_{Esf} + F_{Cil}$ .
- 2º Caso: Se  $F_2$  for a potência esférica ( $F_2 = F_{Esf}$ ), então  $F_1 = F_{Esf} + F_{Cil}$ .

Conhecendo então  $F_1$  e  $F_2$  teremos:

- 1º Caso:  $F_{Esf} = F_1 \Rightarrow F_{Cil} = F_2 - F_1$  e o eixo do cilindro será o do meridiano de  $F_1$ .
- 2º Caso:  $F_{Esf} = F_2 \Rightarrow F_{Cil} = F_1 - F_2$  e o eixo do cilindro será o do meridiano de  $F_2$ .

Por exemplo na associação da lente esférica  $-7.00$  D com o cilindro  $+1.00 \times 90^\circ$ , o resultado final da associação é  $F_1 = -7.00$  D e  $F_2 = -6.00$  D. Escolhendo para parte esférica, a potência do meridiano vertical ( $-7.00$  D), temos então:  $F_{Esf} = -7.00$  D,  $F_{Cil} = +1.00$  D (de  $-6.00 - (-7.00$  D)) e o eixo do cilindro  $90^\circ$ , ou seja na notação esfero-cilíndrica teremos  $-7.00 + 1.00 \times 90^\circ$ .

Escolhendo agora para potência esférica o valor do meridiano horizontal temos que:  $F_{Esf} = -6.00$  D,  $F_{Cil} = -1.00$  D (de  $-7.00 - (-6.00$  D)) e o eixo do cilindro  $180^\circ$ , ou seja na notação esfero-cilíndrica teremos  $-6.00 - 1.00 \times 180^\circ$ .

As duas lentes esfero-cilíndricas obtidas sendo perfeitamente equivalentes são obtidas de forma diferente. Na primeira situação é a composição de uma lente esférica  $-7.00$  D com um cilindro  $+1.00 \times 90^\circ$ , enquanto que na segunda situação temos a adição de uma lente esférica de  $-6.00$  D com um cilindro de  $-1.00 \times 180^\circ$ .

Como acabamos de ver existem sempre duas formas para expressar a mesma lente: a forma regular e a sua transposta. Por norma, porque o sistema que se encontra no equipamento utilizado nos exames optométricos só possui cilindros negativos, associamos a forma regular à que se obtém o cilindro negativo e a forma transposta à que tem o cilindro positivo.

As duas formas apresentam o eixo do cilindro desfasado de  $90^\circ$  e sinais simétricos para a potência do cilindro.

### 2.3.3 Lentes bicilíndricas

Como já foi referido anteriormente o efeito óptico de duas lentes cilíndricas pode ser obtido também pela combinação de lentes esféricas e lentes cilíndricas. A potência cruzada resultante de uma lente, vem da soma das potências cruzadas das suas duas superfícies. Uma superfície pode ser esférica com um único

raio de curvatura, pode ser cilíndrica com dois raios de curvatura, um dos quais é infinito, ou pode ser toroidal com dois raios de curvatura distintos. Em qualquer dos casos os raios de curvatura podem ser positivos ou negativos consoante as superfícies forem côncavas ou convexas.

Uma superfície toroidal apresenta a forma de um “donut” ou de uma câmara de ar insuflada. A superfície é caracterizada por dois raios de curvatura distintos mutuamente perpendiculares. Se os raios de curvatura aumentassem um à custa do outro a forma da superfície toroidal aproximava-se de uma superfície cilíndrica. Então, uma superfície cilíndrica é um caso especial de uma superfície toroidal. Quando duas superfícies cilíndricas com eixos perpendiculares são colocadas em contacto, a superfície equivalente é uma superfície toroidal.

As lentes bicilíndricas são lentes astigmáticas que podem ser consideradas compostas por duas lentes plano-cilíndricas unidas pelas suas superfícies planas. Estas lentes são descritas indicando os dois cilindros com os seus eixos respectivos, unidos mediante o símbolo de combinação, da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} \text{Cilindro 1} & & \text{Cilindro 2} \\ \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} \\ P_1 \times \alpha_1 & \circ & P_2 \times \alpha_2 \\ \uparrow & & \\ \text{Símbolo de combinação} & & \end{array}$$

Ainda que em princípio os dois eixos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  possam formar entre si um ângulo qualquer, existem disposições particulares obrigando a que sejam paralelos ou perpendiculares.

Duas lentes plano-cilíndricas com os eixos paralelos (figura 2-25), são equivalentes a uma lente plano-cilíndrica única, cujos meridianos principais, eixo e contra-eixo, coincidem com os meridianos principais das lentes plano-cilíndricas componentes. Desta forma a potência segundo o eixo da lente bicilíndrica é zero, e a potência do contra-eixo é igual à soma algébrica dos cilindros.

$$F_1 \times \alpha \circ F_2 \times \alpha = F_3 \times \alpha \text{ onde } F_3 = F_1 + F_2$$

Um caso particular dá-se quando os eixos dos cilindros são paralelos e os cilindros possuem potências iguais mas de sinal contrário, sendo a lente bicilíndrica equivalente neste caso uma lente de potência nula.

Duas lentes plano-cilíndricas com os eixos perpendiculares, são equivalentes a um sistema astigmático regular onde o eixo de uma das lentes coincide com o eixo da potência (ou contra-eixo) da outra.

$$F_1 \times \alpha \circ F_2 \times (\alpha + 90^\circ)$$

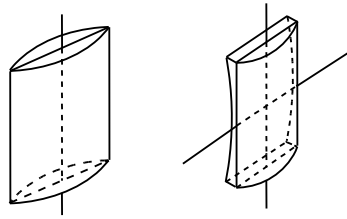
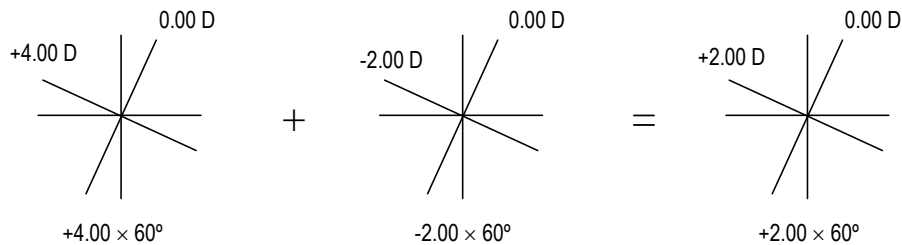


Figura 2- 15 Associação de duas lentes cilíndricas com eixos do cilindro paralelos.

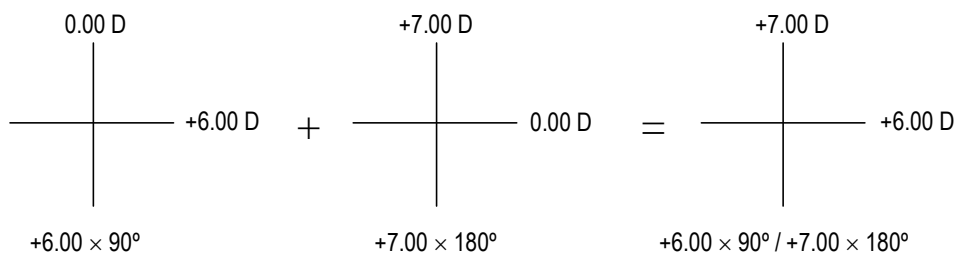
A potência total da lente na direcção  $\alpha^\circ$  é  $F_2$ , enquanto que a potência total na direcção perpendicular  $\alpha \pm 90^\circ$  é  $F_1$ . Os casos apresentados a seguir são exemplos práticos da combinação entre lentes cilíndricas.

- Combinação de lentes cilíndricas com os eixos paralelos



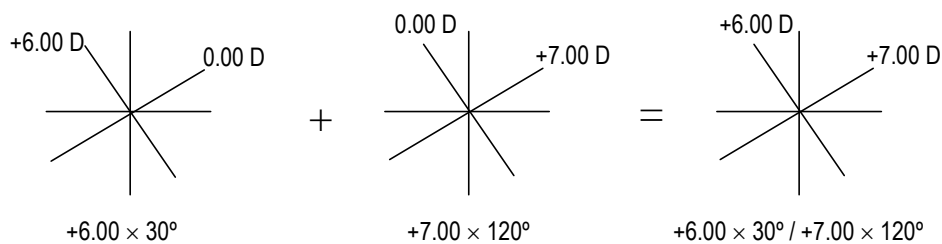
Resultado final da combinação:  $+4.00 \times 60^\circ \cup -2.00 \times 60^\circ = +2.00 \times 60^\circ$

- Combinação de lentes cilíndricas com os eixos perpendiculares a  $0^\circ$  e  $180^\circ$



Resultado final da combinação:  $+6.00 \times 90^\circ \cup +7.00 \times 180^\circ$

- Combinação de lentes cilíndricas com os eixos perpendiculares quaisquer.



Resultado final da combinação:  $+6.00 \times 30^\circ \cup +7.00 \times 120^\circ$

### 2.3.4 Outros tipos de lentes

A capacidade do nosso sistema visual focar ao longe e ao perto instantaneamente, vai diminuindo progressivamente com a idade. Na maioria dos casos a partir dos 40-45 anos surgem problemas de visão ao perto, embora a visão ao longe ainda se mantenha bastante aceitável. Nestas situações temos que manter a visão ao longe e compensar a visão intermédia e a de perto. Uma solução envolve o uso de uma variação progressiva na potência entre a parte superior de uma lente, para visão ao longe, e a parte inferior dessa lente com mais potência, para visão ao perto. A parte superior da lente tem menor potência positiva enquanto que a parte inferior da lente tem de ter maior potência positiva. Este tipo de lente chama-se lente progressiva e apresenta alguns problemas relativos à presença de astigmatismo e distorção nas áreas periféricas da lente, conforme se pode observar na figura 2-16 nas áreas a tracejado.

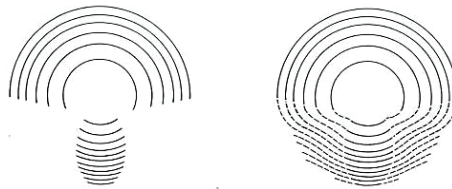


Figura 2- 16 Lentes de correcção progressivas e distorção nas áreas periféricas das lentes.

Quanto maior for a diferença de potência na lente, piores se tornam estas aberrações. Se para a mesma diferença de potência, a área de transição for maior, as aberrações tornam-se menores, mas nesse caso as áreas úteis da lente são mais reduzidas. Os melhores desenhos, para estas lentes, são aqueles que tornarem as inevitáveis aberrações, o mais suavizadas possível e com uma forma que o olho se possa adaptar.

Outro tipo de lentes, utilizadas para possibilitar boa visão ao longe e ao perto, são as lentes bifocais, cujo nome provém de terem duas posições focais. Estas lentes podem ser de dois tipos, as que têm um segmento na parte inferior da lente e as do tipo executivas que estão divididas a meio (ver figuras 2-17).

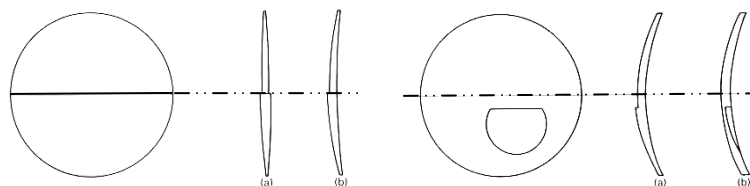


Figura 2- 17 Esquema geométrico das lentes bifocais e executivas.

Nas lentes bifocais normais os segmentos podem apresentar duas formas: círculo ou meia lua. Os segmentos mais utilizados são os de meia lua porque sendo a superfície superior da segmento plana minimiza o salto na imagem quando se passa da visão ao longe para a visão ao perto. O segmento corresponde à zona de visão ao perto, enquanto que a visão ao longe utiliza a parte central da lente. Nas

lentes bifocais executivas a metade superior da lente é utilizada para a visão ao longe e a metade inferior da lente para a visão ao perto. Nas lentes bifocais normais, a posição do segmento varia conforme a lente se destinar ao olho direito ou ao olho esquerdo. Os segmentos encontram-se sempre desviados para o lado nasal (lado do nariz).

# Capítulo 3

## O Sistema Óptico do Olho

---

### 3.1 Introdução

Os olhos em conjugação com o cérebro constituem um sistema bio-óptico notável. É um sistema que forma imagens de objectos para distâncias desde o infinito até a alguns centímetros à frente dos olhos. Tem a capacidade de ver cenas tão grandes como o céu que está por cima de nós e tão pequenas como a cabeça de um alfinete. É um sistema que se adapta automaticamente às diferenças de luminosidade conseguindo formar imagens em condições extremas, tal como permitir ver uma vela distante numa noite escura ou funcionar com a luz intensa do meio dia. Consegue distinguir pequeníssimas variações de cor desde o azul escuro até ao vermelho escuro. Consegue localizar objectos no espaço com elevada precisão, permitindo ao homem ter a capacidade de profundidade, relevo e proximidade dos objectos, criando assim um mapa do nosso mundo a três dimensões.

Por tudo isso a visão é olhada como o mais precioso dos nossos sentidos e a sua perda é catastrófica. É também o mais complexo de todos eles, visto que o seu estudo envolve diversos ramos diferentes da ciência. A breve introdução que se segue, dos vários aspectos relacionados com a visão, tem o intuito de fornecer um panorama do estudo que se segue.

#### O Olho como um órgão do corpo humano

Como o olho humano é parte integrante do corpo não pode ser entendido sem um conhecimento geral de anatomia e fisiologia. Além disso como são, ou podem ser, utilizadas drogas (por pessoas autorizadas) no exame do olho humano, a farmacologia é outra área de estudo a não esquecer.



Como um exame completo ao olho humano é feito de forma a detectar qualquer anomalia que requeira a possibilidade da existência de cuidados médicos, é então necessário um conhecimento geral de patologia para um entendimento de condições oculares anormais.

### O Olho como um instrumento óptico

Dado a integridade do olho como um órgão do corpo humano, vamos considerar os estádios médios no processo visual. Primeiro estágio, o estímulo normal à visão visto normalmente como luz.

A luz visível é a radiação que está compreendida dentro de uma banda do espectro Electromagnético que vai de 380 a 780 nm. As radiações de cada lado desta banda do espectro são o Ultravioleta e o Infravermelho, importantes devido aos efeitos que produzem nos olhos (efeitos prejudiciais).

O olho com boa iluminação é capaz de resolver, normalmente, 40 linhas por centímetro a uma distância de 40 cm.

### O Olho como um fotosensor

A formação de uma imagem é o primeiro passo no processo visual. A retina cobre a maior parte do olho e forma um alvo sensível, no qual a imagem óptica se deve formar quando o sistema está bem focado.

Uma capacidade do olho humano é a sua possibilidade de funcionar num grande domínio de níveis de claridade. Isto é possível através da existência de dois conjuntos diferentes de receptores retinianos denominados bastonetes e cones.

Os bastonetes tornam-se altamente activos para níveis baixos de luminância (escotópica) enquanto que os cones são mais activos para elevados níveis de luminância (fotópica). Num olho existem aproximadamente 7 milhões de cones e pelo menos dez vezes esse número de bastonetes.

Os sistemas cones e bastonetes podem operar simultaneamente, mas quando se passa repentinamente para um nível muito baixo, ou muito alto de iluminação, é preciso esperar alguns minutos para que os olhos se adaptem à escuridão ou à claridade.

O próximo estágio no processo de visão é uma complicada reacção fotoquímica entre a luz que incide na retina e as substâncias químicas que absorvem a luz dentro dela.

A quantidade de luz que penetra em cada olho pode ser regulada pela íris, que controla o diâmetro da pupila.

### O Olho e o cérebro como um processador de dados

A visão simplista de um interruptor da retina para o cérebro, sugere uma comparação com uma linha de luzes individuais usadas para enviar mensagens. Os sinais dos receptores da retina, de cada

olho, passam para o córtex visual do cérebro onde uma única imagem ocular é constituída ponto por ponto por fusão das imagens retinianas direita e esquerda.

A interacção entre processos retinianos e neurais, toma lugar entre vários grupos de receptores da retina, parecendo canais especializados para a detecção de linhas verticais e horizontais, diferentes frequências espaciais e outras informações importantes da imagem observada.

## O Olho como um par

Uma vantagem da existência de dois olhos é a possibilidade extrairmos informação adicional sobre as posições relativas dos objectos no espaço, devido aos seus diferentes pontos de vista.

Como a visão é uma sensação, temos consciência dos nossos olhos estarem separados.

A visão binocular, uso simultâneo de ambos os olhos trabalhando em conjunto, ocorre em vários estádios do desenvolvimento de diferentes espécies, mas atinge o seu mais alto nível de perfeição nos primatas. Um dos factores que torna isso possível é que a retina não é igualmente sensível em toda a sua área. Numa zona central muito pequena, a fóvea central, densamente povoada de cones (só com cones), a acuidade visual ou agudeza visual atinge um pico muito pronunciado. Duas vantagens muito importantes que resultam desse facto são que em primeiro lugar podemos concentrar a nossa atenção visual e mental num pequeno mas adequado campo e em segundo lugar a fóvea tem o papel importante de monitorizar os necessários movimentos dos olhos. A não ser que o objecto que está a ser observado tenha a imagem na fóvea de cada olho, acontece a diplopia (visão dupla).

Um conjunto de seis músculos externos ligados ao globo ocular permitem que ele se mova em qualquer direcção desejada. No estudo que se vai seguir vamos assumir que:

1. A convenção de sinais é a estabelecida no capítulo 1.
2. Em problemas que envolvam um olho, a observar um objecto através de um prisma ou de uma lente, ignora-se em primeiro lugar o olho e a sua posição, determinando-se a posição e as dimensões da imagem formada pela lente ou pelo prisma pelos métodos normais. Em segundo lugar esta imagem, real ou virtual conforme o caso, torna-se objecto para o olho.

As unidades fotométricas usadas são, para a luminância a  $\text{cd m}^{-2}$  e para a iluminância retiniana o troland. 1 troland é a unidade de iluminância que corresponde a um olho com uma área pupilar de  $1 \text{ mm}^2$  que observa uma superfície com uma luminância de  $1 \text{ cd m}^{-2}$ .

## Sistemas não equifocais

O olho é um exemplo de um sistema óptico não equifocal, no qual o primeiro e o último meio têm diferentes índices de refração. Em geral tais sistemas têm seis pontos cardinais simetricamente posicionados (figura 3.1):

- $F$  e  $F'$  - o primeiro e o segundo focos principais, definidos exactamente como para uma única superfície refractora.

- $P$  e  $P'$  - o primeiro e segundo pontos principais.
- $N$  e  $N'$  - o primeiro e segundo pontos nodais.

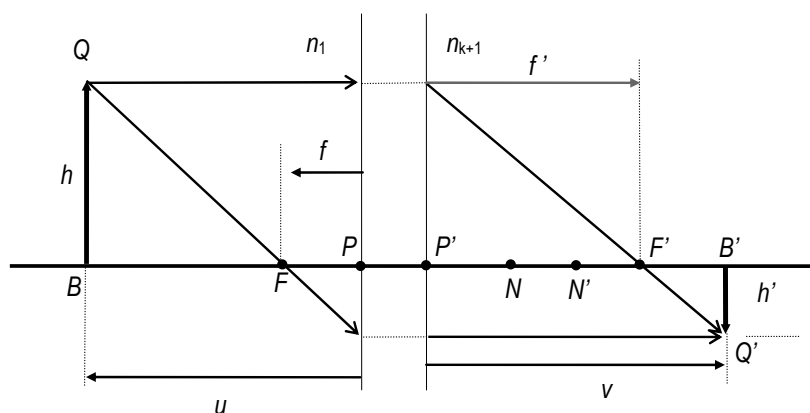


Figura 3- 1 Pontos cardinais e focos conjugados de um sistema refractor não equifocal.

O sistema como um todo tem uma potência equivalente  $F$  dada por:

$$F = \frac{n_{k+1}}{f'} = -\frac{n_1}{f}$$

onde  $f' = P'F$ ,  $f = PF$ ,  $n_1$  representa o índice de refração do primeiro meio e  $n_{k+1}$  o índice de refração do último meio de um sistema tendo  $k$  superfícies. Se  $u$  é medido a partir de  $P$  e  $v$  a partir de  $P'$  a relação entre focos conjugados toma mais uma vez a forma

$$V' = V + F$$

onde  $V' = \frac{n_{k+1}}{l'}$  e  $V = \frac{n_1}{l}$ .

Seja um raio de um ponto objecto não axial,  $Q$ , direccionado para  $P$  e fazendo um ângulo  $u$  com o eixo óptico (figura 3-2), o raio emergente correspondente parece ter passar por  $P'$  e fazer um ângulo  $u'$  com o eixo óptico tal que

$$n_{k+1} u' = n_1 u$$

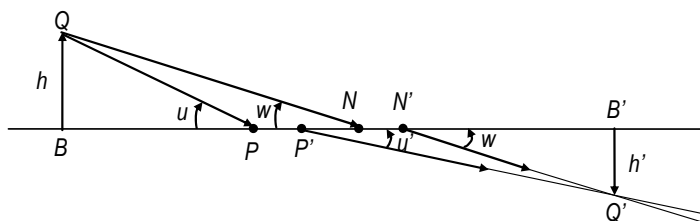


Figura 3- 2 Construção de uma imagem para um sistema óptico usando os pontos principais e nodais.

Outro raio partindo de Q é direccionado para o ponto N. O raio emergente correspondente parece ter passado por N' sem variar a sua direcção. Tal como mostra a figura 3-2, estes dois pares de raios podem ser usados para construir a imagem B'Q' de um objecto BQ.

### Efectividade

Tenha-se um feixe de raios a percorrer um meio de índice de refração  $n$  e seja a distância à origem do feixe de raios, medida a partir de um ponto específico O (figura 3-3).

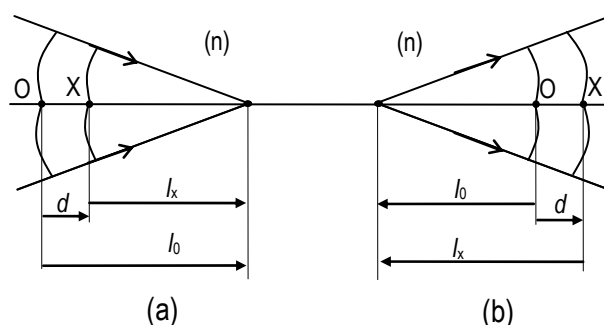


Figura 3- 3 Efectividade (a) feixe convergente, (b) feixe divergente.

Depois de ter percorrido uma distância  $d$  em metros, a partir de O, para um outro ponto específico X, a frente de onda está a uma distância  $l_x$  do seu foco. Assim,  $l_x = l_0 - d$  e  $V_x = n/l_x$  e virá:

$$V_x = \frac{n}{l_0 - d} = \frac{n}{\left(\frac{n}{V_0}\right) - d} = \frac{V_0}{1 - \left(\frac{d}{n}\right)V_0}$$

isto expressa uma relação geral para a efectividade, denotando uma variação da vergência quando a luz passa de um ponto ou superfície de referência para um outro ponto.

Se  $d$  é relativamente pequeno, a expressão anterior pode ser expandida pelo teorema binomial dando:

$$V_x \cong V_0 \left( 1 + \frac{d}{n} V_0 + \dots \right) \approx V_0 + \frac{d}{n} V_0^2$$

a quantidade  $\frac{d}{n}$  é um exemplo de uma distância atravessada por um feixe de raios, dividida pelo índice de refração do meio.

### Ângulo e potência de um prisma

Conforme é do domínio comum, os ângulos podem ser expressos em graus ou radianos, mas não só. Existe uma outra unidade que pode ser utilizada para expressar um ângulo que é a dioptria prismática ( $\Delta$ ). Esta unidade (introduzida por C.F. Prentice em 1890) reveste-se de grande importância na óptica oftálmica.

Se  $u$  é um ângulo menor que  $90^\circ$  então  $u$  em dioptrias prismáticas vem:

$$u(\Delta) = 100 \tan u$$

da figura 3-2 temos:

$$u = 100 \left( \frac{BQ}{BP} \right) \Delta$$

a desvantagem deste sistema é que a tangente de um ângulo não aumenta na proporção do ângulo, isto é:

$$20\Delta = \tan^{-1} 0.2 = 11.31^\circ$$

$$40\Delta = \tan^{-1} 0.4 = 21.80^\circ$$

Para ângulos pequenos, podemos afirmar que  $4^\circ = 7\Delta$  e que a dioptria prismática é equivalente a uma centésima do radiano, já que  $\sin u \cong \tan u \cong u$ , logo  $\Delta = 1/100\text{rad}$ . Na área oftálmica a dioptria prismática é a unidade aceita para potência prismática e desvio.

### 3.2 A Córnea

Vamos agora estudar os vários componentes do sistema óptico do olho. A córnea (figura 3-4) é uma estrutura altamente transparente em forma de menisco, com um diâmetro de aproximadamente 12 mm e ligeiramente menor verticalmente que horizontalmente. A espessura ao centro é normalmente entre 0.5 e 0.6 mm.

Uma fina película de fluido lacrimal cobre a superfície anterior, mas como é tão fina não afecta a potência de forma apreciável podendo por isso ser ignorada neste contexto.

Em primeira aproximação ambas as superfícies podem ser observadas como esféricas, tendo raios de curvatura de +7.7 mm para a cara anterior e de +6.8 mm para a cara posterior (valores para o olho de Gullstrand). O índice de refração da substância da córnea pode ser tomado como 1.336 (para o olho de Gullstrand). Utilizando a equação que relaciona a potência com o raio de curvatura vamos determinar a potência da córnea.

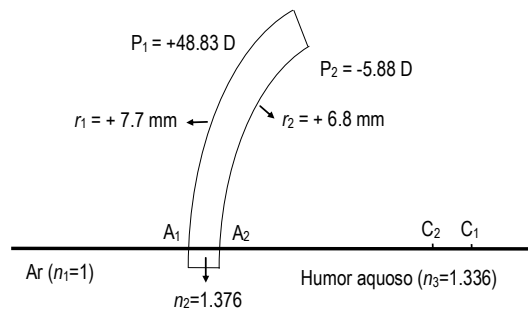


Figura 3- 4 Perfil da córnea humana (valores típicos do olho esquemático de Gullstrand).

$$F = (n' - n)R$$

donde:

- (1) Para a superfície anterior temos:

$$F_1 = \frac{1.376 - 1}{7.7 \times 10^{-3}} = +48.83 \text{ D}$$

- (2) Para a superfície posterior temos:

$$F_2 = \frac{1.336 - 1.376}{6.8 \times 10^{-3}} = -5.88 \text{ D}$$

A potência total da córnea dada por  $F = F_1 + F_2 + \frac{d}{n_2} F_1 F_2$  é então de + 42.73 D.

Desprezando a espessura da córnea (portanto desprezando o último termo) teríamos uma potência de +42.95 D. Na prática, para cálculos rápidos, a espessura da córnea pode ser desprezada já que a alteração produzida na sua potência é somente de 0.22 D.

### **3.3 Câmara anterior**

A câmara anterior é a cavidade que está por detrás da córnea e em frente da íris e da lente cristalino. É preenchida com um líquido incolor chamado *humor aquoso* já que é constituído por 98% de água.

A profundidade da câmara anterior, ao longo do eixo óptico, é rigorosamente a distância desde o vértice posterior da córnea até à superfície anterior da lente cristalino (às vezes inclui a espessura da córnea). Um valor médio para a espessura da câmara anterior é de 3.0 mm. A profundidade da câmara anterior influencia a potência total do olho. Se todos os outros elementos se mantiverem inalterados uma redução de 1 mm na profundidade da câmara anterior faz com que a potência total do sistema óptico aumente em cerca de 1.4 D. O efeito contrário resulta de uma variação de profundidade na direcção oposta.

### **3.4 A íris e a pupila**

A quantidade de luz admitida pelo olho é regulada pela pupila, uma abertura aproximadamente circular na íris. Em condições normais a pupila reage a:

- (1)  $\Rightarrow$  Uma variação da luminância.
- (2)  $\Rightarrow$  Um estímulo similar aplicado só à pupila chamado reacção consensual.
- (3)  $\Rightarrow$  À fixação perto, que é acompanhada de uma contracção pupilar.

As dimensões da pupila diminuem com a idade de uma maneira uniforme. Num adulto jovem a variação do diâmetro de acordo com a luminância é de 4.5 até 8.0 mm. Aos 80 anos de idade o diâmetro diminui para cerca de 2.5 mm e as variações na luminância produzem poucas variações no diâmetro da íris.

### **3.5 O Cristalino**

O cristalino tem uma finalidade dupla, por um lado equilibrar a potência refractiva do olho e por outro fornecer um mecanismo de focagem para diferentes distâncias (chamado de acomodação). Tanto anatomicamente como opticamente, o cristalino é uma estrutura altamente complexa composta por

camadas de fibras dispostas radialmente de modo regular permitindo a formação de um círculo de difracção simétrico.

O cristalino está constantemente a crescer formando-se novas camadas de fibras exteriormente. Como parte deste processo de crescimento o cristalino é susceptível a mudanças na sua flexibilidade e transparência, diminuindo estas com a idade.

A substância que forma o cristalino está contida numa cápsula altamente elástica. Uma estrutura de ligamentos suspensivos, denominada *zónula de Zinn*, que liga a periferia da cápsula ao corpo ciliar que lhe está próximo, coloca o cristalino em posição e controla a curvatura das superfícies através de variações produzidas na tensão produzida pela acção do músculo ciliar.

A lente cristalino tem um diâmetro de aproximadamente 9 mm e tem uma forma biconvexa, a superfície anterior é mais plana que a posterior. Quando a lente está num estado não acomodado (tenso), a espessura ao centro da lente é de 3.6 mm e o raio de curvatura na região perto do eixo é de +10 mm para a cara anterior e -6 mm para a cara posterior, valores assumidos no olho esquemático de Gullstrand.

Quando existe acomodação ambas as superfícies, mas de um modo especial a anterior, assumem uma forma mais curva. A espessura ao centro aumenta e o vértice da superfície anterior desloca-se para fora, reduzindo-se assim a profundidade da câmara anterior. Os perfis do cristalino típico no estado relaxado e no seu estado de maior acomodação estão representados na figura 3-5, bem como o espaço de variação dos centros de curvatura.

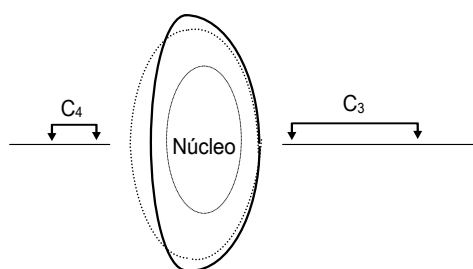


Figura 3- 5 Perfil do Cristalino no estado acomodado (linha a tracejado) e não acomodado (linha a cheio).

A superfície posterior do cristalino está em contacto com o humor vítreo, um gel transparente que preenche o segmento posterior do globo ocular. O índice de refracção deste gel pode tomar-se como sendo igual ao do humor aquoso (1.336). A composição química dos dois humores (aquoso e vítreo) é muito semelhante.

No cristalino consegue-se distinguir uma parte central chamada núcleo e uma parte que a contorna que é o córtex. No centro do núcleo o índice de refracção atinge o seu valor máximo, entre 1.40 e 1.41, diminuindo à medida que nos afastamos do centro, sendo de 1.385 perto dos pólos e cerca de 1.375 perto do equador. Este gradiente do índice de refracção, produz um efeito convergente tal como uma lente positiva. Tomando os valores dos raio de curvatura e da espessura axial, atrás referidos, é necessário assumir para o índice de refracção um valor fictício de 1.416, para obtermos a mesma potência do cristalino esquemático homogéneo, que está compreendido entre os valores de +21 D e +22 D.



Tomando então como índice de refração para o cristalino o valor de 1.416, as potências das superfícies no seu estado relaxado podem ser calculadas com base nas equações descritas no ponto 1.4 e seguintes. Desse modo temos:

Para a superfície anterior

$$F_3 = \frac{1.416 - 1.336}{+10 \times 10^{-3}} = +8.00 \text{ D}$$

Para a superfície posterior

$$F_4 = \frac{1.336 - 1.416}{-6 \times 10^{-3}} = +13.33 \text{ D}$$

Temos então uma potência equivalente de aproximadamente +21.6 D. A suposição de que as superfícies da lente (cristalino) são esféricas é feita só por conveniência. Observações cuidadosas revelam que existe um grau de aplanamento periférico acentuado, especialmente na superfície anterior no seu estado acomodado.

Devido a este facto e ao de que na córnea também sucede o mesmo fenómeno, a aberração esférica é mantida dentro dos limites razoáveis.

### 3.6 A retina

A retina é uma estrutura fina mas muito complexa. As suas funções estendem-se muito mais para além do que se suponha originalmente. A retina cobre a porção posterior do globo ocular, estendendo-se até à ora serrata perto do corpo ciliar.

As fibras nervosas que transmitem impulsos dos receptores retinianos individuais ou em grupos, deslocam-se através da superfície da retina para o nervo óptico. A retina tem também vasos sanguíneos visíveis claramente através de um oftalmoscópio. Apesar destas obstruções à luz incidente, a eficiência do sistema não é afectada. Em certas condições, contudo, os vasos sanguíneos retinianos podem ser observados através das sombras que eles projectam.

A capacidade da retina para distinguir detalhes não é uniforme em toda a sua extensão e tem um máximo na região da mácula. Esta é uma área aproximadamente circular com um diâmetro de 1.5 mm, contendo uma pequena área central, a *fóvea central*, contendo exclusivamente cones retinianos. É na fóvea que o olho atinge o seu pico máximo de resolução. Quando um objecto cativa a atenção visual, os dois olhos rodam instintivamente de forma que a imagem se forme em cada fóvea.

Do ponto de vista óptico, a retina pode ser descrita como um alvo no qual se forma a imagem do objecto observado. Pode ser observada como parte de uma superfície esférica côncava com um raio de

curvatura próximo de -12 mm. A curvatura da retina tem duas vantagens, em primeiro lugar as imagens formadas pelo sistema óptico tendem a ter superfícies curvas (a curvatura da retina é então ideal deste ponto de vista) e em segundo lugar a retina com a sua curvatura acentuada cobre um maior campo de visão, que de outro modo não seria possível.

### 3.7 O olho esquemático

O olho esquemático é uma especificação óptica teórica de um olho idealizado, contendo a maior parte das dimensões mas omitindo as mais complicadas. A potência equivalente do olho como um todo é cerca de +60 D e os seus pontos cardinais estão situados da forma indicada na figura 3-6. Os dois pontos principais, P e P', estão situados na câmara anterior às distâncias de 1.55 mm e 1.85 mm respectivamente da superfície frontal da córnea. Os pontos nodais, N e N', estão também separados de 0,3 mm e próximos da superfície posterior do cristalino. A distância focal anterior,  $PF$ , é aproximadamente de -16.53 mm e a posterior,  $P'F'$ , de + 22.04 mm. As relações gerais e os percursos dos raios luminosos indicados nas figuras 3-1 e 3-2 aplicam-se ao olho esquemático (figura 3.7).

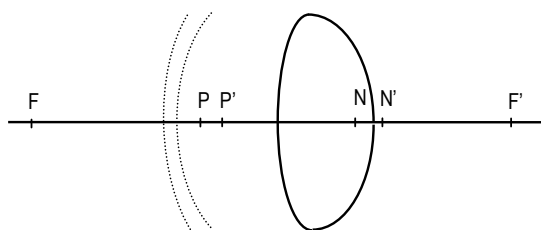


Figura 3- 6 Pontos cardinais do olho não acomodado.

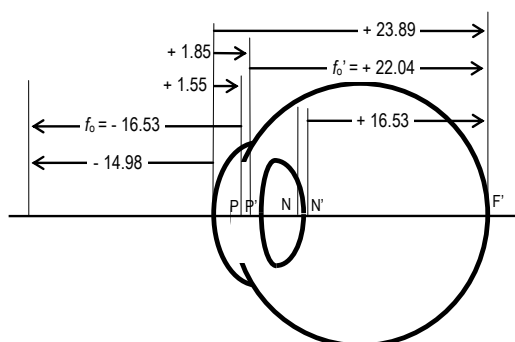


Figura 3- 7 O olho esquemático de Gullstrand – Emsley (medidas em milímetros).

#### 3.7.1 Centro óptico

No olho esquemático assume-se que todas as superfícies refractoras são coaxiais, isto é, a córnea e o cristalino têm um eixo óptico comum. A centragem óptica de um olho humano típico não é verdadeira,

o cristalino está normalmente descentrado e inclinado em relação à córnea. Por esta razão o olho não possui um verdadeiro eixo óptico. Contudo os pontos principais da córnea coincidem quase com os do cristalino esquemático. Consequentemente, uma linha que passe o mais próximo possível desses pares de pontos representa uma boa aproximação de um eixo óptico.

### 3.7.2 Pupilas de entrada e de saída

Se a pupila  $HJ$  (figura 3-8) com o centro em  $E_0$  é observada como um objecto para a córnea, dá origem a uma imagem ligeiramente maior com o seu centro de curvatura em  $E$ . Esta imagem é chamada pupila de entrada. Tomada como objecto para o cristalino, a pupila  $HJ$  dá origem a outra imagem, a pupila de saída com centro em  $E'$ .

Disto resulta que um feixe de luz incidente dirigido para a pupila de entrada e de maneira que a preencha, passa através da área total da pupila real (depois da refacção na córnea) e finalmente emerge no humor vítreo, parecendo ter sido limitado pela pupila de saída. Já que um raio direccionado para o ponto axial  $E$  aparece, depois da refacção, como passando pelo ponto axial  $E'$ , estes dois pontos têm de ser conjugados relativamente ao sistema como um todo.

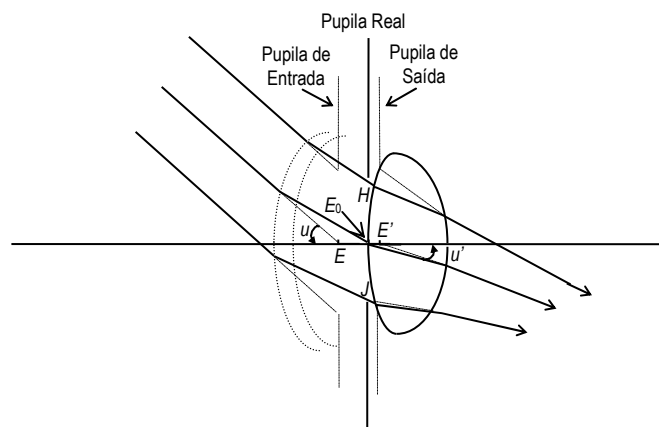


Figura 3- 8 Pupilas do olho: real, de entrada e de saída.

Com base na teoria paraxial, mostra-se que a pupila de entrada está situada cerca de 3 mm atrás da superfície anterior da córnea e é cerca de 13% maior que a pupila real. A pupila de saída está muito perto da pupila real e atrás dela sendo 3% maior que ela.

Devido a que  $E$  e  $E'$  são pontos conjugados pode-se estabelecer uma relação entre os ângulos  $u$  e  $u'$ :

$$\frac{u'}{u} = \text{constante para um dado sistema}$$

para o olho esquemático o valor desta constante é de 0.82.

### 3.7.3 O eixo visual

Seria normal esperar que a fóvea estivesse situada na retina na sua intersecção com o eixo óptico, no chamado pólo posterior da retina. No entanto, a fóvea encontra-se deslocada temporalmente e para baixo relativamente à posição esperada. Isso leva-nos a definir um eixo visual distinto do eixo óptico.

O eixo visual, é tido como a linha imaginária dirigida ao primeiro ponto nodal  $N$  que sai de  $N'$  paralela à primeira e que passa pela fóvea. Sem muito erro pode assumir-se que existe uma posição média dos dois pontos nodais e que o eixo visual pode ser definido como a linha que passa por essa posição média e pela fóvea. Contudo, existem autores que não concordam com esta definição afirmando que por eixo visual se deve entender o eixo ou raio principal do feixe de raios que entra pela pupila e converge para a fóvea. Neste livro o termo eixo visual será usado para definir o percurso do raio incidente dirigido para o centro da pupila de entrada que depois de refractado incida na fóvea (figura 3-9).

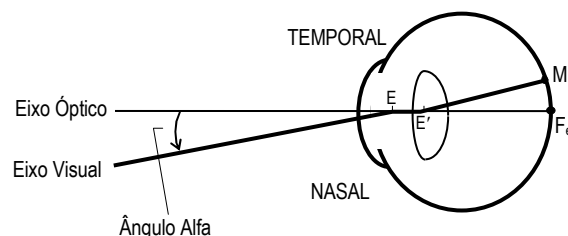


Figura 3- 9 Eixo óptico e eixo visual do olho.

O ângulo entre o eixo óptico e o eixo visual é chamado ângulo alfa. O ângulo alfa é considerado positivo quando o eixo visual, no espaço objecto, está no lado nasal relativamente ao eixo óptico. Um valor comum para o ângulo alfa é  $5^\circ$ .

## 3.8 O campo de visão

No lado temporal, onde não existem obstruções, o campo de visão estende-se para mais de  $90^\circ$  relativamente ao eixo óptico. Um raio extremo que entre no olho por esse lado, segue aproximadamente o percurso apresentado na figura 3-10. Este diagrama também serve para explicar a razão da retina se estender até tanto á frente no olho. Se não houvesse luz a chegar a essa região não seria necessário que existisse aí retina. No lado nasal, o nariz, as sobrancelhas e as bochechas limitam o campo de visão monocular, donde a sua forma ser irregular. Por outro lado se  $UN$  e  $VN$  forem raios incidentes formando um ângulo  $u$  entre si, os raios refractados conjugados divergirão como se saíssem de  $N'$  formando o mesmo ângulo  $u$  tocando na retina nos pontos  $U'$  e  $V'$ .

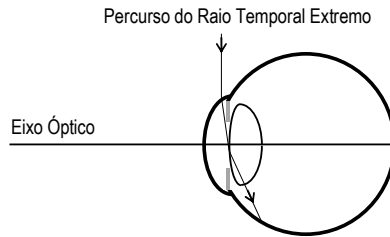


Figura 3- 10 Percurso de um raio de luz no limite do campo visual do olho.

Assim, podemos inferir que uma extensão linear da retina subtendendo um ângulo conhecido no segundo ponto nodal corresponderá a uma extensão angular igual no espaço objecto (figura 3-11).

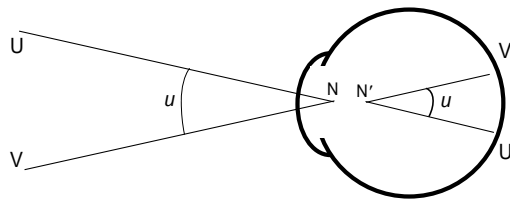


Figura 3- 11 Projecção visual através do ponto nodal.

A fóvea tem cerca de 0.3 mm horizontalmente e 0.2 mm verticalmente, subtendendo um ângulo no segundo ponto nodal cerca de  $0.018 \times 0.012$  radianos. A uma distância normal de leitura (por exemplo 35 cm) a área observada é de  $6.3 \times 4.2$  mm, o suficiente para conter 4 letras de tamanho de jornal ou revista.

Na papila, ou disco óptico, onde o nervo óptico deixa o olho, não existem receptores retinianos. Se não existem fotoreceptores não existe visão, donde consequentemente vai existir um ponto cego no campo visual. O disco óptico mede cerca de 2 mm verticalmente por 1.5 mm horizontalmente, subtendendo um ângulo de  $7^\circ$  por  $5^\circ$ , respectivamente, no segundo ponto nodal. Esta é a extensão angular subtendida pelo ponto cego do olho no espaço.

O centro do disco óptico está deslocado para o lado nasal e ligeiramente para cima relativamente à fóvea. Relativamente ao eixo visual o centro do ponto cego está deslocado  $15^\circ$  para o lado temporal e  $2^\circ$  para baixo. Na figura 3-12 mostram-se as posições na retina do disco óptico, da fóvea e da mácula, relativamente ao pólo posterior do olho. As dimensões apresentadas em graus referem-se à extensão angular subtendida no segundo ponto nodal.

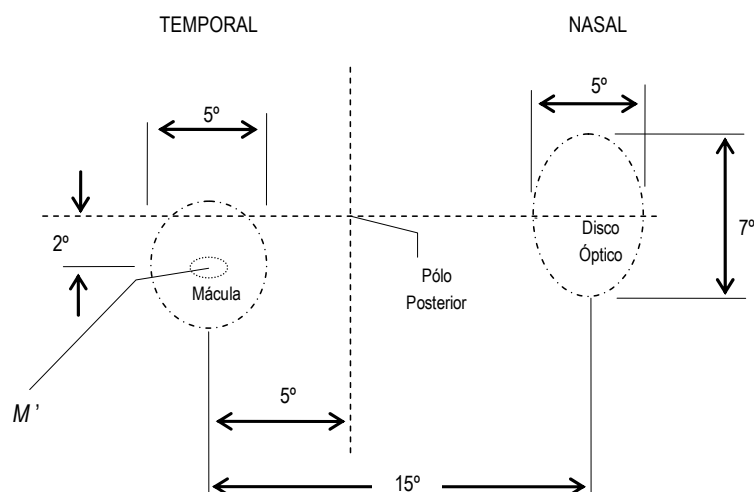


Figura 3- 12 Posições e dimensões relativas da mácula e do disco óptico.

A característica mais surpreendente do ponto cego é que a sua existência não é notada. Mesmo com um olho ocluído e o outro a observar um padrão brilhante e colorido ocupando uma grande extensão, o observador continua a não ter consciência de nenhum ponto escuro onde não exista visão.

### 3.9 O olho reduzido

Para a maioria das finalidades, a óptica do olho pode ser estudada adequadamente com base numa analogia muito simples chamada olho reduzido. Tal como apresentado na figura 3-13, o olho reduzido consiste de uma superfície única convexa, que separa o ar de um meio com índice de refração  $n'$  semelhante ao do corpo vítreo.

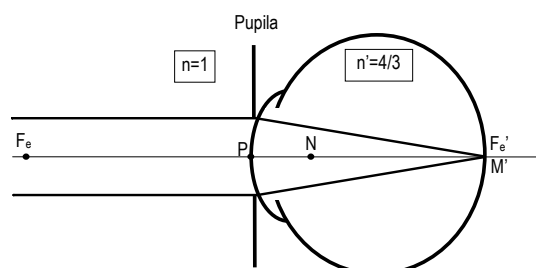


Figura 3- 13 Esquema do olho reduzido.

Na versão de Emsley a potência  $F_e$  é tida como exactamente 60 D e o valor de  $n'$  igual a 4/3. As duas distâncias focais  $f_e$  e  $f'_e$  podem ser calculadas através de:

$$F_e = -\frac{n}{f_e} = \frac{n'}{f'_e}$$

Donde

$$f_e = PF_e = -1000/F_e = -1000/60 = -16.67 \text{ mm}$$

e

$$f'_e = PF'_e = 1000 n' / F'_e = 4000/3 \times 60 = +22.22 \text{ mm}$$

como  $F = (n' - n)/r$ , então o raio de curvatura da superfície refractora vem igual a +5.56 mm.

No caso de uma única superfície de refração, os dois pontos principais coincidem um com o outro e com o vértice da superfície, ao mesmo tempo que os dois pontos nodais coincidem um com o outro e com o centro de curvatura da superfície. A linha que passa por  $P$  e  $N$  é o eixo óptico, assumindo-se que a fóvea se encontra nessa mesma linha (na intersecção do eixo óptico com a retina), sendo então o eixo óptico também eixo visual.

Por conveniência a pupila do olho reduzido é considerada como estando centrada no vértice da superfície de refração, e as pupilas de entrada e de saída coincidem com a pupila do olho. Na figura 3-13 pode observar-se o esquema do olho reduzido enquanto que na figura 3-14 observa-se a sobreposição do olho esquemático de Gullstrand-Emsley com o olho reduzido. Conforme se pode observar o ponto principal do olho reduzido está situado entre os dois pontos principais do olho esquemático.

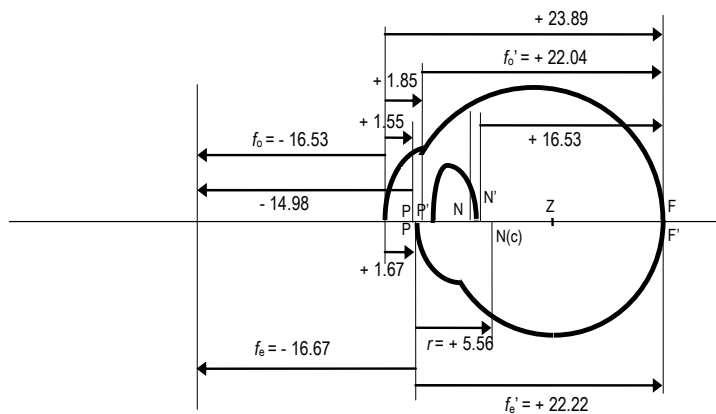


Figura 3- 14 Comparação do olho esquemático de Gullstrand-Emsley com o olho reduzido.

### 3.10 A imagem retiniana

Antes de nos debruçarmos sobre as características da imagem retiniana, convém fazer a distinção entre imagem retiniana que pode ser desfocada ou focada conforme existam ou não problemas de visão e a

imagem óptica que é a imagem focada formada pelo sistema refractor do olho como se não existisse retina.

Conhecendo-se os dados necessários, a posição e a altura da imagem óptica pode ser calculada algebricamente com base nas equações deduzidas no capítulo 1.

Se o objecto estiver no infinito a sua imagem forma-se no plano do 2º foco principal. O seu tamanho depende do ângulo subtendido pelo objecto. Por exemplo na figura 3-15, os raios provenientes do ponto  $Q$  situado a uma grande distância, estão inclinados de um ângulo  $u$  relativamente ao eixo óptico e são focados no ponto  $Q'$  pertencente ao plano de  $F_e'$ . O raio que passa pelo ponto nodal não sofre desvio continuando na mesma direcção, ao passo que o ponto que passa pelo ponto principal é desviado em direcção ao eixo, formando um ângulo  $u'$  com ele. Dessa forma teremos que

$$n' \sin u' = n \sin u$$

Como  $n = 1$  e considerando os ângulos pequenos teremos então que  $n'u' = u$  isto é  $u' = u/n'$ .

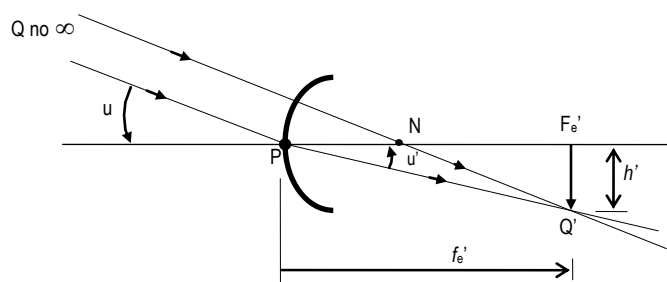


Figura 3- 15 Construção da imagem no olho reduzido para um objecto no infinito.

Como da figura  $u' = -h'/f_e'$  vem que

$$h' = -u'f_e' = -\frac{uf_e'}{n'} = \frac{u}{F_e}$$

onde  $F_e$  é a potência do olho reduzido. Nesta última expressão  $h'$  vem em metros e  $u$  em radianos.



# Capítulo 4

## O Olho Esquemático

---

### 4.1 Introdução

O objectivo do olho esquemático é fornecer uma base para estudos teóricos do olho como um instrumento óptico. No desenho de um tal olho as complexidades que não tiverem importância fundamental devem ser ignoradas. As simplificações devem no entanto variar de acordo com os diferentes campos de investigação. Por exemplo ao substituir-se a córnea por uma única superfície de refacção, não se afecta o tamanho da imagem retiniana final mas torna-se o esquema inadequado para o estudo das imagens de Purkinje.

Existem vários esquemas do olho com diferentes dimensões consoante o seu autor. Temos como exemplos o olho esquemático de Gullstrand (1909), o olho esquemático de Swaine (1921), o olho esquemático de Le Grand (1945), o olho esquemático de Ivanoff (1953), etc. Os primeiros esquemas surgiram por volta de 1850, e para o mesmo autor existem por vezes várias versões de olhos esquemáticos. No que diz respeito às potências dos olhos esquemáticos, ela variou entre +67 D e +58.64 D para o estado não acomodado chegando às +70.6 D no estado acomodado.

Gullstrand propôs dois olhos esquemáticos representando extremos opostos. A versão nº 1 apresenta seis superfícies de refacção, enquanto que a versão nº 2 consiste de uma única superfície para a córnea e uma lente cristalino fina. Tal como outros autores Gullstrand propôs para cada uma das suas versões, dois modelos correspondentes ao estado não acomodado e ao estado acomodado, respectivamente. Na versão nº 1 a potência no estado relaxado é de +58.64 D e no estado acomodado é de +70.57 D. Para a versão nº 2, o olho simplificado apresenta uma potência de +59.74 D no estado não

acomodado e +70.54 D no estado acomodado. Ambos os olhos têm o mesmo comprimento axial, 24 mm, em que o nº 1 tem +1.00 D de hipermetropia enquanto que o nº 2 é emétrope.

Para fins gerais, o esquema do olho com três superfícies (de Listing) torna-se sem dúvida o melhor, no entanto a versão inventada por Emsley, com base nos dados de Gullstrand, foi muito bem aceite, razão pela qual se utiliza essa versão para o olho esquemático.

Outras versões de olhos esquemáticos foram propostos por outros autores tais como Le Grand e Ivanoff, no entanto as diferenças entre os diferentes olhos esquemáticos é muito ligeira e sem grandes consequências.

## 4.2 A córnea

O primeiro olho esquemático de Gullstrand apresenta ambas as superfícies da córnea, com raios de curvatura de +7.7 mm e +6.8 mm, respectivamente e a espessura axial é de 0.5 mm. O índice de refração da substância que compõe a córnea é de 1.376 e o índice de refração do humor aquoso é de 1.336. Estes valores dão para a potência da superfície frontal

$$F_1 = \frac{n_2 - n_1}{r_1} = +48.83 \text{ D}$$

onde  $n_2$  e  $n_1$  representam os índices de refração da substância da córnea e do ar respectivamente, e  $r_1$  é o raio de curvatura da primeira superfície da córnea. E para a potência da superfície posterior

$$F_2 = \frac{n_3 - n_2}{r_2} = -5.88 \text{ D}$$

onde  $n_3$  e  $n_2$  representam os índices de refração do humor aquoso e da substância da córnea respectivamente, e  $r_2$  é o raio de curvatura da segunda superfície da córnea. Então a potência equivalente do olho vem

$$F = F_1 + F_2 - \left( \frac{t}{n_2} \right) \cdot F_1 \cdot F_2 = +43.05 \text{ D}$$

onde  $t$  representa a espessura da córnea. A distância  $d$  do primeiro ponto principal ao vértice da superfície frontal é dado por

$$d = \frac{t}{n_2} \times \frac{F_2}{F} = -0.05 \text{ mm}$$

enquanto que a distância  $d'$  do segundo ponto principal ao vértice da segunda superfície é dado por

$$d' = \frac{-t n_3}{n_2} \times \frac{F_1}{F} = -0.551 \text{ mm}.$$

Assim, ambos os pontos principais estão à frente da córnea. O primeiro a 0.05 mm e o segundo a 0.051 mm do vértice frontal da córnea. Isto significa que eles quase que coincidem um com o outro e com a primeira superfície da córnea. Portanto a simplificação por uma única superfície para a córnea é opticamente legítima.

### 4.3 O cristalino

Para os fins do olho esquemático, a lente cristalino com as suas complicadas variações no índice de refração, tem de ser substituída por alguma coisa muito mais simples. No seu primeiro olho esquemático, Gullstrand representou o cristalino matematicamente, baseando-se na aproximação que se mostra na parte superior da figura 3.14. Nesta aproximação o cristalino consiste de um núcleo homogêneo com índice de refração 1.406, rodeado por um córtex com índice de refração 1.386. Tanto o humor aquoso como o humor vítreo são considerados como tendo um índice de refração de 1.336. Os raios de curvatura das quatro superfícies refractoras são +10 mm, +7.911 mm, -5.76 mm e -6 mm respectivamente, enquanto que as espessuras axiais são 0.546 mm, 2.419 mm e 0.635 mm, dando uma espessura total de 3.6 mm. A potência equivalente do sistema é de +19.11 D, e os pontos principais estão a 2.080 e 2.205 mm do pólo anterior da lente, que está a 3.6 mm do vértice corneal anterior.

Se o cristalino for concebido como um elemento homogêneo biconvexo com raios de curvatura e espessuras iguais às anteriores (ver parte inferior da figura 3.14), para obtermos a mesma potência equivalente de +19.11 D, temos que ter um índice de refração de 1.409. Os pontos principais estão agora a 2.159 mm e 2.305 mm do pólo anterior.

Em 1936 Emsley sugeriu a variação do índice de refração do cristalino para 1.416 e do humor aquoso para  $4/3$ , enquanto mantinha fixos os valores para os raios de curvatura externos e para a espessura ao centro do cristalino, vistos no primeiro olho esquemático de Gullstrand. Estas variações aumentam a potência equivalente do cristalino para +21.76 D, fazendo ao mesmo tempo com que a potência equivalente do olho como um todo, esteja muito próxima do seu valor médio mais provável.

## 4.4 O olho esquemático de Gullstrand – Emsley

### 4.4.1 Dados gerais

As modificações introduzidas por Emsley consistiram em remover o núcleo do cristalino do primeiro olho esquemático de Gullstrand e substituir a córnea por uma única superfície no segundo olho de Gullstrand. As separações axiais e os raios de curvatura permanecem inalterados, mas o índice de refração do humor aquoso e do cristalino passaram a ser de 4/3 e 1.416, respectivamente.

Na tabela 4-1 temos todos os valores para este olho esquemático, quando o olho está relaxado e quando está acomodado, todas as dimensões estão em milímetros e as potências em dioptrias.

### 4.4.2 Cálculo de constantes ópticas

Para o olho esquemático em geral, a aproximação convencional é primeiro determinar a potência equivalente da córnea e a posição dos seus pontos principais, a partir das expressões normais. Depois, a potência equivalente do cristalino e os seus pontos principais determinam-se da mesma forma. Os dois sistemas são depois combinados através da expressão

$$F = F_1 + F_2 - \left( \frac{d}{n} \right) \cdot F_1 \cdot F_2$$

onde  $d$  é a distância de separação entre os dois sistemas. Neste caso  $d$  é medido a partir do segundo ponto principal da córnea até ao primeiro ponto principal do cristalino. Quando a córnea é representada por uma única superfície, os cálculos ficam mais simplificados já que a potência equivalente da córnea é a de uma única superfície e os dois pontos principais coincidem com o vértice. A figura 4-1 ilustra os pontos principais e os componentes do olho esquemático de Gullstrand-Emsley no não acomodado.

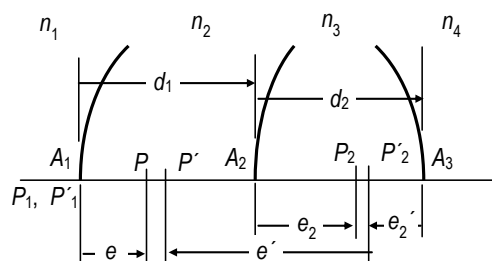


Figura 4- 1 Representação da posição dos pontos principais e dos componentes do olho esquemático de Gullstrand-Emsley.

Os resultados são os seguintes:

Potência das superfícies

$$F_1 = \frac{(n_2 - n_1)}{r_1} = +42.731 \text{ D}$$

$$F_2 = \frac{(n_3 - n_2)}{r_2} = +8.27 \text{ D}$$

$$F_3 = \frac{(n_4 - n_3)}{r_3} = +13.783 \text{ D}$$

Potência equivalente do cristalino ( $F_c$ )

$$F_c = F_2 + F_3 - \left( \frac{d_2}{n_3} \right) \cdot F_2 \cdot F_3 = +21.763 \text{ D}$$

Pontos principais do cristalino ( $P_c$  e  $P'_c$ )

$$e_2 = A_2 P_2 = \frac{n_2 d_2 F_3}{n_3 F_c} = +2.147 \text{ mm}$$

$$e'_2 = A_2 P'_2 = \frac{-n_4 d_2 F_2}{n_3 F_c} = -1.288 \text{ mm}$$

Potência equivalente do olho ( $F_0$ )

$$P'_1 P_2 = P'_1 A_2 + A_2 P_2 = d_1 + e_2 = 5.747 \text{ mm}$$

$$F_0 = F_1 + F_c - \left( \frac{d_1 + e_2}{n_2} \right) \cdot F_1 \cdot F_2 = +60.486 \text{ D}$$

Posição dos pontos principais do olho ( $P$ ,  $P'$ )

$$e = P'_1 P = A_1 P = \frac{n_1 (d_1 + e_2) F_c}{n_2 F_0} = +1.551 \text{ mm}$$

$$e = P'_2 P' = \frac{-n_4 (d_1 + e_2) F_1}{n_2 F_0} = -4.060 \text{ mm}$$

$$A_1P' = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3P_2' + P_2'P' = +1.852\text{mm}$$

Distâncias focais equivalentes do olho ( $f_0$ ,  $f_0'$ )

$$f_0 = PF = n_1/F_0 = -16.53\text{mm}$$

$$f_0' = P'F' = n_4/F_0 = +22.043\text{mm}$$

Posição dos pontos nodais ( $N$ ,  $N'$ )

Os pontos nodais de qualquer sistema refractante estão posicionados de uma forma tal que  $N'F' = FP$  e  $NN' = PP'$ . Isto dá

$$A_1N = +7.061\text{mm} \text{ e } A_1N' = +7.362\text{mm}$$

Comprimento total de um olho emétrepe ( $A_1F'$ )

$$A_1F' = A_1P' + P'F' = 23.895 \text{ mm}$$

## 4.5 O olho esquemático acomodado

Quando o olho esquemático acomoda, ambas as superfícies do cristalino, mas especialmente a superfície anterior torna-se mais curva. Ao mesmo tempo, a espessura axial aumenta e a lente move-se ligeiramente em direcção à câmara anterior. No estado de acomodação máximo, a espessura axial aumenta de 0.4 mm passando de 3.6 a 4.0 mm e a profundidade da câmara anterior diminui da mesma medida (0.4 mm) passando a 3.2 mm. O efeito da acomodação na posição dos pontos principais do olho é pequeno. Ambos se deslocam de 0.25 mm em direcção à retina, no seu estado de acomodação máximo. Ao mesmo tempo ambos os pontos nodais se movem de 0.5 mm em direcção à córnea. Na figura 4-2 apresentam-se os movimentos relativos dos pontos principais e dos pontos nodais quando o olho está relaxado e quando está acomodado.

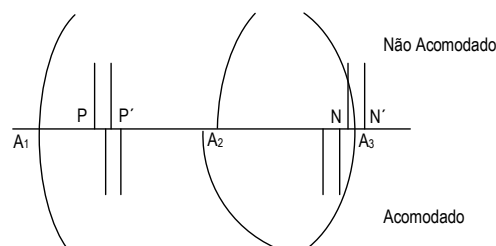


Figura 4- 2 Comparação das posições dos pontos principais e dos pontos nodais do olho esquemático de Gullstrand-Emsley no estado não acomodado e em total acomodação.

No estado de acomodação máximo a potência do cristalino aumenta de 10.55 D, passando de +21.76 D para + 32.31 D, enquanto que a potência equivalente do olho aumenta só de 9.24 D.

Tabela 4- 1 Dados para o olho esquemático de Gullstrand-Emsley

QUANTIDADE	SÍMBOLO	RELAXADO	ACOMODADO
<b>Raios de curvatura</b>			
- Córnea	$r_1$	+ 7.8	+ 7.8
- Cristalino			
- 1ª superfície	$r_2$	+ 10.00	+ 5.00
- 2ª superfície	$r_3$	- 6.00	- 5.00
<b>Distâncias axiais</b>			
- Profundidade da câmara anterior	$d_1$	3.60	3.20
- Espessura do cristalino	$d_2$	3.60	4.00
- Profundidade do corpo vítreo	$d_3$	16.69	16.69
<b>Comprimento axial total</b>		23.89	23.89
<b>Índices de refração médios</b>			
- Humor aquoso	$n_2$	1.3333	1.3333
- Cristalino	$n_3$	1.4160	1.4160
- Humor vítreo	$n_4$	1.3333	1.3333
<b>Potência das superfícies</b>			
- Córnea	$F_1$	+ 42.73	+ 42.73
- Cristalino			
- 1ª superfície	$F_2$	+ 8.27	+ 16.54
- 2ª superfície	$F_3$	+ 13.78	+ 16.54
<b>Potências equivalentes</b>			
- Cristalino	$F_c$	+21.76	+32.31
- Olho	$F_o$	+ 60.49	+ 69.73
<b>Distâncias focais equivalentes do olho</b>			
- 1ª distância focal	$f_0$	- 16.53	- 14.34
- 2ª distância focal	$f'_0$	+ 22.04	+ 19.12
<b>Distâncias do vértice corneal</b>			
- 1º ponto principal		+ 1.55	+ 1.78
- 2º ponto principal		+ 1.85	+ 2.13
- 1º ponto nodal		+ 7.06	+ 6.56
- 2º ponto nodal		+ 7.36	+ 6.91
- pupila de entrada		+ 3.05	+ 2.67
- pupila de saída		+ 3.69	+ 3.25
- 1º foco principal		- 14.98	- 12.56
- 2º foco principal		+ 23.89	+ 21.25
<b>Estado refractivo</b>	$K$	0	- 8.47
<b>Distância do ponto próximo ao vértice corneal</b>			- 116.2

## 4.6 Relações paraxiais

As equações fundamentais  $L' = L + F_e$ ,  $K' = K + F_e$  e  $L' = h(L/L')$  ou  $L' = h(K/K')$ , aplicadas ao olho esquemático dão as distâncias  $l$  e  $l'$  ou  $k$  e  $k'$  medidas a partir do primeiro e segundo pontos principais, respectivamente, tal como se mostra na figura 4-3. É importante lembrar que no olho esquemático a distância  $k'$  não representa o comprimento axial total, tal como no olho reduzido.

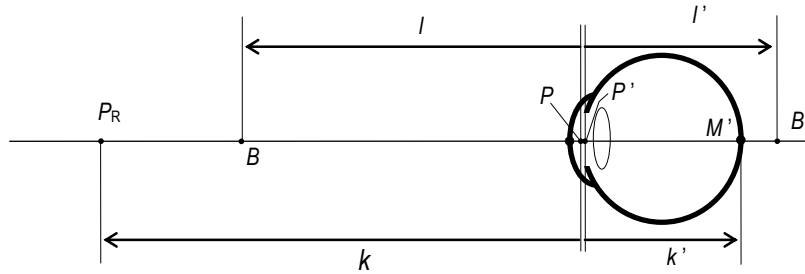


Figura 4- 3 Medição das distâncias conjugadas a partir dos pontos principais do olho.

## 4.7 As imagens de Purkinje

### 4.7.1 Considerações teóricas

As imagens de Purkinje são reflexões a partir das várias superfícies refractoras do olho. Quando a luz incide numa superfície refractora, existe uma pequena parte do feixe incidente que é reflectido. A luz reflectida é plano-polarizada com um grau de polarização determinado pelo ângulo de incidência. Para ângulos de incidência até  $15^\circ$  o grau de polarização é desprezável e a reflectância pode ser determinada através da expressão

$$R = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  são os índices de refração do primeiro e segundo meios respectivamente.

A luz que penetra no olho sofre as primeiras reflexões nas superfícies da córnea e depois nas superfícies do cristalino. É usual designar as imagens produzidas por estas reflexões por Purkinje I, II, III e IV, onde os números em romano designam as superfícies refractoras pela ordem em que aparecem.

Para estudar Purkinje I (também chamada reflexo corneal) podemos observar a superfície anterior da córnea como um espelho convexo. Qualquer espelho convexo dá lugar a uma imagem virtual, direita e diminuída de um objecto real. A imagem cresce à medida que o objecto se aproxima do espelho. Se o



raio anterior da córnea for +7.8 mm, o plano focal está situado a metade desta distância, isto é, 3.9 mm atrás do vértice, dando à superfície uma potência catóptrica de -256 D. Isto é tão elevado que Purkinje I permanece substancialmente no plano focal enquanto a distância for muito pequena.

Para formar as restantes imagens de Purkinje, a luz incidente é em primeiro refractada até às superfícies que vão actuar como espelhos e depois da reflexão é refractada mais uma vez através dessas superfícies pela ordem inversa antes de emergir do olho.

A primeira imagem de Purkinje, Purkinje I, (produzida por reflexão na superfície anterior da córnea) é a imagem mais intensa devido à grande diferença entre os índices de refacção do ar e da substância da córnea. Está situada aproximadamente no plano pupilar e o seu tamanho é intermédio entre as imagens produzidas pelas superfícies do cristalino.

A segunda imagem, Purkinje II, (produzida por reflexão na superfície posterior da córnea) tem uma intensidade muito fraca devido a que a diferença entre os índices de refacção do material da córnea e do humor aquoso é muito pequena. Além disso está mascarada pela primeira imagem que se forma muito perto dela já que o raio de curvatura da superfície posterior é ligeiramente menor que o da superfície anterior. Isto faz com que esta imagem passe despercebida. O seu tamanho é também ligeiramente menor.

A terceira imagem, Purkinje III, (que se forma sobre a superfície anterior do cristalino que também actua como espelho convexo) é a maior de todas estas imagens visto que o raio de curvatura da superfície anterior do cristalino é maior que os da córnea. A sua intensidade luminosa é a mais débil devido a factores como:

- (a) ser a de maior tamanho.
- (b) não existir muita diferença entre os índices de refacção do humor aquoso e do cristalino.
- (c) a superfície ser menos lisa que a da córnea.
- (d) a existência de diferentes índices de refacção no cristalino.

Durante a acomodação esta imagem torna-se mais pequena já que o raio de curvatura diminui, isto é, aumenta a curvatura da superfície anterior do cristalino.

A quarta imagem, Purkinje IV, (formada por reflexão na superfície posterior do cristalino) diferencia-se das outras já que é formada por uma superfície côncava. A imagem é então real e invertida. A sua intensidade é maior que a anterior mas o seu tamanho é menor que a da primeira imagem de Purkinje (Purkinje I). Durante a acomodação esta imagem sofre pouca modificação.

Pelas suas características as imagens de Purkinje servem para calcular a posição exacta e o raio de curvatura das superfícies reflectoras.

#### **4.7.2 Dimensões e propriedades**

O olho esquemático de Le Grand é apropriado para o cálculo das imagens de Purkinje, visto incorporar as quatro superfícies responsáveis por elas. Le Grand calculou as posições e os tamanhos relativos das imagens, para uma distância objecto de 500 mm. Os seus resultados podem ser observados na Tabela II,

junto com os cálculos similares para um objecto no infinito. As dimensões do olho esquemático de Le Grand são:

#### Olho relaxado

Raios de curvatura	+7.8; + 6.5; + 10.2; - 6.0 mm.
Separações axiais	0.55; 3.05; 4.0 mm.
Índices de refacção	1; 1.3771; 1.3374; 1.42; 1.336.

#### Olho acomodando 6.96 D

Raios de curvatura	+ 7.8; + 6.5; + 6; - 5.5 mm.
Separações axiais	0.55; 2.65; 4.5 mm.
Índices de refacção	1; 1.3771; 1.3374; 1.42; 1.336.

Tabela 4- 2 Imagens de Purkinje calculadas do olho esquemático de Le Grand.

Imagem Nº	Brilho relativo	Olho não acomodado				Olho acomodado (6.96 D)	
		Objecto distante		Objecto a 500 mm		Objecto distante	
		Posição imagem	Tamanho relativo	Posição imagem	Tamanho relativo	Posição da imagem	Tamanho relativo
I	1	+3.90	1	+3.870	1	+3.900	1
II	0.01	+3.605	0.820	+3.585	0.821	+3.605	0.820
III	0.008	+10.726	1.971	+10.610	1.945	+6.200	1.102
IV	0.008	+4.625	-0.763	+4.325	-0.762	+5.237	-0.773

Dado um objecto relativamente distante, o tamanho da imagem formada por reflexão é proporcional à distância focal do espelho, que é metade do raio de curvatura. Se o objecto subtende um ângulo  $u$  (em radianos), a altura  $h'$  da imagem é dada por

$$h' = u f' = u \left( \frac{r}{2} \right)$$

Se  $h'_k$  designar a altura da  $k$ -ésima imagem de Purkinje e  $r'_k$  for o raio de curvatura do espelho equivalente correspondente, então

$$h'_k = u \left( \frac{r'_k}{2} \right)$$

e como para o mesmo objecto  $h'_1 = u(r_1/2)$ , então  $r'_k = r_1 \left( \frac{h'_k}{h'_1} \right)$ .

### 4.7.3 Centragem óptica do olho

O olho não é um sistema óptico centrado, não possui um verdadeiro eixo óptico. A imagem do ponto de fixação forma-se na fóvea, ao redor da qual se ordenam todos os objectos do campo visual. A fóvea não está situada sobre o eixo óptico, mas sim aproximadamente a 1.25 mm abaixo dele no lado temporal. É esta parte da retina que se utiliza para a visão nítida.

Quando observamos um objecto não o fazemos directamente segundo o eixo óptico, mas sim ao longo da linha que une o objecto (ou o ponto de fixação) à fóvea e que passa pelo ponto nodal. A esta linha damos o nome de eixo visual.

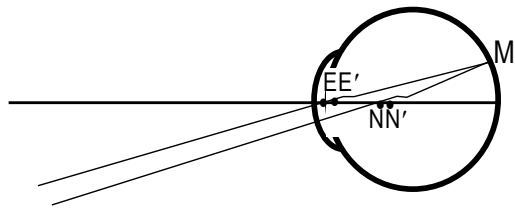


Figura 4- 4 Eixo visual através das pupilas de entrada e de saída e o eixo nodal através dos pontos nodais de um olho emétopico (os dois eixos num emétopo são paralelos).

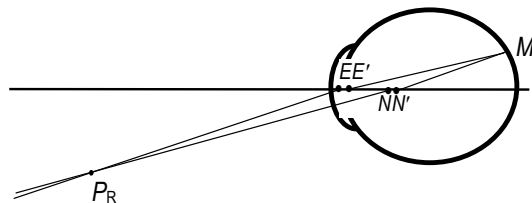


Figura 4- 5 Olho míope. As linhas que saem da fóvea e passam pelas pupilas de saída e pelos pontos nodais interceptam-se no ponto remoto.

No caso da emétopia os raios são paralelos para visão longe, enquanto que para o caso da miopia os raios cruzam-se no ponto remoto, que por definição é o ponto conjugado com a fóvea.

O ângulo entre o eixo óptico e o eixo visual é denominado eixo alfa. Este ângulo é tomado como positivo quando o eixo visual, no espaço objecto, está no lado nasal do eixo óptico.

Um outro eixo é o eixo pupilar, que pode ser definido como a linha que passa pelo centro da pupila e que incide na córnea normalmente. Este raio tem de passar então normalmente pelo centro de curvatura desta superfície. Tipicamente a pupila está descentrada nasalmente de 0.25 mm do eixo óptico, em ambos os casos tanto a pupila de entrada como a pupila de saída estão no lado nasal do eixo óptico. Mesmo um descentramento de 0.25 mm gera um ângulo de mais ou menos 3° entre o eixo óptico e o eixo pupilar.

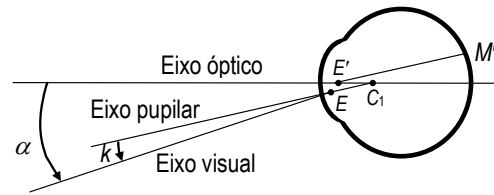


Figura 4- 6 Os eixos óptico, pupilar e visual do olho.

O ângulo kapa (ou lambda), é o ângulo entre o eixo pupilar e o eixo visual. Mais recentemente o ângulo kapa é utilizado para denotar o ângulo entre o eixo pupilar e a linha principal de fixação.

# Capítulo 5

## Acuidade Visual

---

### 5.1 Introdução

Visão é o processo através do qual um organismo vê e inclui todos os estádios desde os estímulos físicos que atingem o olho até à percepção mental. A quantidade de informação necessária por um organismo, varia de espécie para espécie adaptando-se o sistema visual a essa situação.

O olho humano é capaz de muitas tarefas envolvendo diferentes complexidades de visão. Essas tarefas podem ser classificadas segundo os seguintes itens:

1. Percepção da luz, por exemplo, o patamar de visão no olho normal ou a resposta de um olho doente.
2. Descriminação, ou capacidade do sistema visual para distinguir um objecto do seu fundo.
3. Visão de formas e reconhecimento, tal como a capacidade para identificar letras e palavras.
4. Resolução ou a capacidade de ver um detalhe.
5. Localização, por exemplo, observando que um objecto está situado ao lado de um outro objecto.
6. Tarefas maiores onde o sistema visual estimula outras respostas, por exemplo, resposta motora.

Os dois aspectos mais importantes do ponto de vista clínico são a visão das formas e a resolução.

## 5.2 Descriminação de linhas

A capacidade do olho perceber que um objecto está separado do seu fundo, depende em parte das luminâncias relativas do objecto e do fundo. Se o fundo for muito escuro, o objecto é visto, sempre que a iluminação da sua imagem retiniana exceda o limiar de luminância do olho para aquele nível de adaptação. A capacidade de ver um objecto escuro contra um fundo iluminado, está dependente de um limiar diferente. Nestas condições o contraste na imagem de um objecto grande é semelhante ao contraste no objecto (figura 5-1). À medida que o objecto diminui de tamanho, o contraste da imagem diminui, em parte devido a imperfeições do sistema óptico do olho.

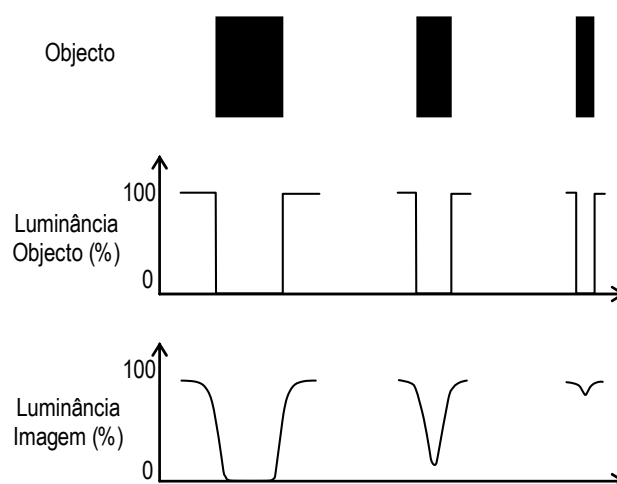


Figura 5 - 1 Transferência de contraste num sistema óptico.

Um objecto escuro será percebido sempre que a variação na iluminação retiniana exceda o limiar da diferença de luminância,  $\Delta L/L$ . Esta fracção conhecida como fracção de Weber-Fechner, varia com a luminância do fundo e atinge o valor mínimo de 2% para níveis fotópicos moderados. Assim, sempre que a imagem retiniana de um objecto escuro cause uma diminuição da iluminação na retina cerca de 2%, é provável que esse objecto se veja. Sob boas condições, uma linha subtendendo 0.5 segundos de arco pode ser vista, sempre que esteja suficientemente longe (por exemplo, uma linha de telefone), para a sua imagem cobrir muitos receptores.

Se o objecto apresentar um contraste reduzido com o fundo, tal como uma linha cinzenta num fundo luminoso, a variação na iluminação retiniana tem de exceder o limiar da diferença de luminância numa área que seja suficiente para se conseguir a descriminação.

## 5.3 Resolução

### 5.3.1 Teoria dos receptores

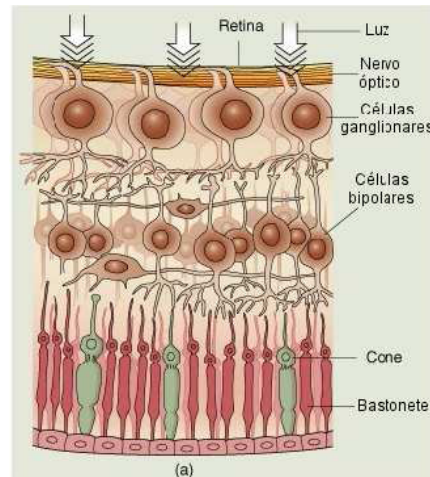


Figura 5 - 2 Esquema do arranjo dos fotoreceptores da retina.

Na fóvea, os cones têm um diâmetro de  $1.5\ \mu\text{m}$  aproximadamente e estão separados de aresta a aresta por  $0.5\ \mu\text{m}$ . Então a separação efectiva entre os centros dos cones é de aproximadamente  $2\ \mu\text{m}$ . Suponhamos que o olho está a observar duas fontes pontuais de luz muito próximas. Se as suas imagens estiverem em dois cones vizinhos, elas serão percebidas como uma única fonte de luz. Contudo, se existir um cone não estimulado entre dois iluminados pelas imagens, então é provável que exista resolução suficiente para distinguir os dois pontos luminosos.

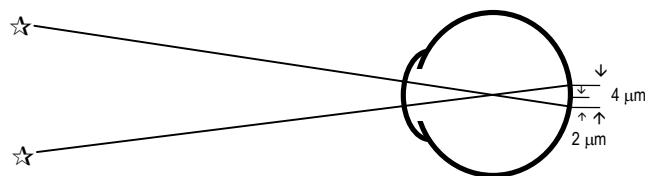


Figura 5 - 3 Teoria da resolução dos receptores.

Assumindo que o ponto nodal está situado a  $11.67\ \text{mm}$  em frente da retina, então temos um limite teórico para a resolução de aproximadamente 49 segundos de arco.

Esta análise simplificada só é válida se cada cone puder transmitir um impulso em separado, o que quer dizer que existe pelo menos uma fibra nervosa para cada cone da fóvea. Na periferia da retina, cada fibra nervosa é estimulada por vários receptores donde o que é importante neste caso são as

dimensões do campo receptor correspondente a cada fibra nervosa, e não o tamanho dos receptores individuais.

### 5.3.2 Teoria ondulatória

A teoria ondulatória da luz prediz que, mesmo com um sistema óptico perfeito, a imagem de um ponto objecto não é um ponto, mas sim uma mancha com uma área finita devida ao fenómeno de difracção da luz provocado pelas margens do sistema óptico. Para aberturas circulares, essa imagem toma a forma de um disco central brilhante rodeado de anéis claros e escuros alternados.

O disco central contém cerca de 84% da luz existente no padrão de difracção e é chamado disco de Airy. No olho, o ângulo subtendido por este disco no ponto nodal ( $\omega$ ) é dado pela expressão

$$\omega = \frac{2.44\lambda}{D}$$

onde  $D$  representa o diâmetro pupilar em metros e  $\lambda$  representa o comprimento de onda da luz também em metros.

Se tivermos duas fontes pontuais adjacentes muito próximas, vai haver sobreposição dos dois padrões de difracção gerados pelas fontes, cada um contribuindo para a iluminância da imagem retiniana na área de sobreposição.

Na figura 5-4 mostra-se as curvas de iluminância relativa para os discos de Airy individuais (a tracejado), e o resultado da sobreposição das duas (a cheio).

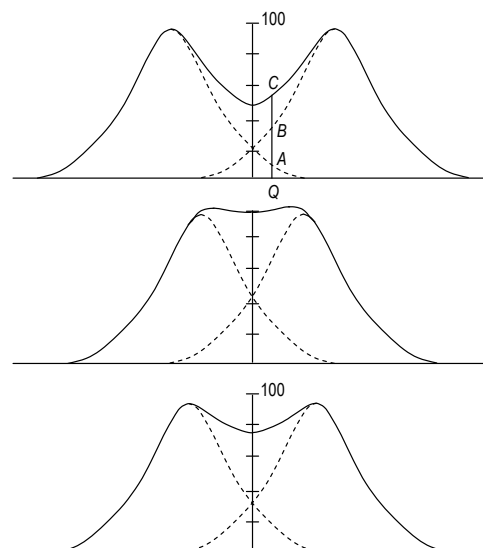


Figura 5 - 4 Discos de Airy com diferentes separações.



Por exemplo no ponto Q a iluminação devida ao disco de Airy esquerdo é proporcional a QA enquanto que a parte devida ao outro disco de Airy é proporcional a QB. A soma de QA e QB é igual a QC, que determina o ponto correspondente na curva de sobreposição. Se os dois padrões de difracção estiverem suficientemente separados, a curva da iluminância total apresenta dois picos com uma depressão no centro. À medida que os pontos objecto se vão aproximando um do outro, assim as suas imagens e eventualmente os dois picos aparecerão juntos num único centro brilhante. Nestas condições é impossível ver os dois objectos separados, eles não se conseguem resolver.

Segundo um critério sugerido por Rayleigh, podem-se resolver dois objectos desde que o pico central do segundo disco de Airy coincida com a parte extrema do primeiro disco de Airy.

Este critério estabelece um valor para  $\theta_{\min}$ , ângulo de resolução mínimo do olho, dado por

$$\theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{D} \text{ (rad)}$$

### 5.3.3 Resolução de uma rede e acuidade

Vamos estudar o caso de uma rede formada por linhas paralelas alternadamente claras e escuras (figura 5-5). Normalmente as linhas claras têm as mesmas dimensões das linhas escuras. Uma tal rede é conhecida como rede de Foucault ou rede onda quadrada, já que o contraste se altera rapidamente na mudança de claro para escuro e vice-versa.

O limite de resolução para uma rede de onda quadrada é, normalmente expresso como o ângulo subtendido em segundos de arco para um elemento da rede (uma linha escura mais uma clara). Se as linhas têm a mesma largura, o tamanho de um elemento da rede é o mesmo em qualquer parte dessa rede. Um valor típico para o limite de resolução de uma rede quadrada é de 80 a 90 segundos de arco.

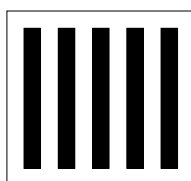


Figura 5 - 5 Rede de Foucault.

De um modo geral a acuidade visual é inversamente proporcional ao ângulo de resolução mínimo. Então, se A for o ângulo subtendido pelo detalhe básico do teste objecto mais pequeno discernível, a acuidade visual V pode ser definida como  $V = k/A$ , onde k é uma constante arbitrária. Esta é a base da notação decimal para a acuidade visual, onde A é expresso em minutos de arco e o valor de k é unitário.

A acuidade visual pode ser expressa sob a forma da acuidade da espessura de uma linha, e a unidade será a recíproca de minutos de arco.

### 5.3.4 Resolução e tamanho da pupila

A difracção produzida pelos bordos da pupila fornece o ângulo visual mínimo com o qual se consegue resolver dois objectos, como função inversa do diâmetro da pupila. Então, para pupilas com grandes diâmetros, o disco de Airy é pequeno e o limite de resolução tem também de ser pequeno. Inversamente, pupilas pequenas (em diâmetro) resultam em grandes ângulos para o limiar de resolução. Embora esta relação seja verdadeira para sistemas ópticos livres de aberrações, as aberrações dos olhos reduzem esta performance, para pupilas com diâmetros grandes. Na figura 5-6 mostra-se a resolução de uma rede de Foucault como função das dimensões da pupila. A linha recta a tracejado representa a performance predita pelo critério de Rayleigh, e a linha curva a cheio representa a performance do olho tendo em conta as aberrações existentes.

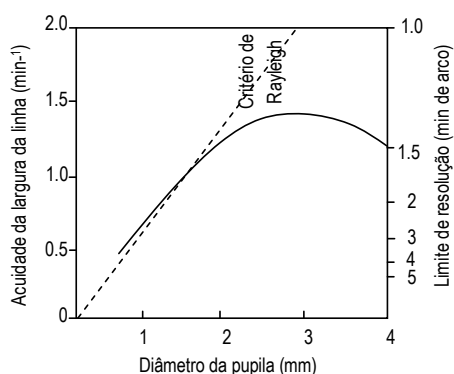


Figura 5 - 6 Resolução da rede de Foucault como função das dimensões da pupila.

Observa-se que a performance do olho segue a linha de variação dada pelo critério de Rayleigh até pupilas com diâmetro cerca de 1.5 mm, e depois desvia-se dessa linha devido à presença de aberrações no sistema visual. A melhor acuidade, equivalente a um limite de resolução de 77 segundos de arco, ocorre para pupilas com diâmetro de 3 mm. Acima deste diâmetro a resolução torna-se pobre em condições fotópicas, porque os efeitos das aberrações começam a ser predominantes no sistema. Em condições escotópicas normais, um aumento nas dimensões da pupila dá lugar a um aumento na iluminação retiniana, o que faz aumentar a acuidade.

### 5.3.5 Resolução e iluminação

#### 5.3.5.1 Dimensões da pupila fixas

A retina funciona mais eficientemente para elevados níveis de iluminação, tornando mais fácil ler em boa luz do que em baixas iluminações. Contudo existem outros factores a considerar. O diâmetro da pupila altera-se com o nível de iluminação, por isso em medições científicas fixa-se o diâmetro da pupila.

A iluminância retiniana é dada em trolands. Como a iluminância da imagem retiniana varia com o quadrado do diâmetro da pupila, não é suficiente dizer qual a luminância do objecto em teste. Troland sugeriu por isso, uma unidade baseada num olho com um área pupilar de um milímetro quadrado, que observe uma superfície de luminância de uma candela por metro quadrado.

De notar que a iluminância da retina é influenciada pela transparência dos meios que compõe o olho e que a luz que entra pela periferia da pupila não é tão eficiente no estímulo dos cones retinianos como a luz que passa pelo centro da pupila, variação conhecida como efeito de Stiles-Crawford.

### 5.3.5.2 Diâmetro da pupila variável

Uma aproximação alternativa é permitir que a pupila retome ao seu tamanho natural à medida que a iluminação do teste objecto varia. Embora esta situação dê menos informação relativamente à fisiologia da retina, permite ter uma melhor ideia sobre o que acontece em condições normais.

A acuidade neste caso aumenta com o aumento da luminância até  $3400 \text{ cd m}^{-2}$ , depois do que a resolução diminui. Além disso a acuidade aumenta com o aumento do espaço circundante. O aumento é muito mais marcado para espaços com dimensões acima dos  $6^\circ$ . Por exemplo, para a maioria dos pacientes, se uma única letra é apresentada iluminada com um fundo escuro, a acuidade visual é menor do que a mesma letra inserida num espaço circundante iluminado.

## 5.4 Visão e acuidade visual em prática clínica

### 5.4.1 Introdução

Nas secções anteriores, a resolução do olho foi considerada relativamente a um par de fontes e linhas de uma rede. A resolução do olho pode ser também considerada, tendo em conta os anéis de Landolt e alguns caracteres (ver figura 5-7). Embora sejam testes objectos úteis para o estudo científico não são, à excepção dos anéis de Landolt e dos caracteres, satisfatórios para o trabalho clínico. Fontes pontuais e redes não representam o tipo de detalhe que um paciente normal vê. É portanto útil utilizar como testes objectos, caracteres com os quais o paciente esteja familiarizado. Se forem utilizados símbolos de várias dimensões, os pequenos caracteres serão vistos por pessoas com boa visão, enquanto que pacientes com baixa visão necessitam de caracteres maiores para verem.

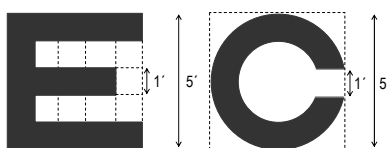


Figura 5 - 7 E de Snellen e C de Landolt

Os caracteres que se utilizam mais frequentemente são letras maiúsculas, embora se utilizem também números e outros símbolos.

Normalmente em vez de se utilizar o termo limite de resolução, utilizam-se os dois termos que se seguem:

1. **Acuidade Visual** - determinada a partir da linha de letras ou de símbolos mais pequena existente na carta de testes, que pode ser lida pelo paciente depois de os defeitos de focagem, que não sejam devidos a aberrações, terem sido corrigidos.

2. **Visão** - determinada a partir das dimensões da linha de letras ou de símbolos mais pequena da carta de testes que pode ser lida pelo paciente a olho nu.

### 5.4.2 Distância para cartas de testes e acuidade

Em testes de visão distante, a distância de teste deve ser suficientemente grande para não estimular a acomodação. O valor aceitável em muitos países é de 6 metros, mas na maioria dos países Europeus a distância utilizada é de 5 metros.

As cartas testes para adultos apresentam, de uma maneira geral letras maiúsculas estilizadas que foram desenhadas de maneira a preencherem uma rede de quadrados unitários. Uma das primeiras cartas de testes foi introduzida por Snellen em 1862.

Consideremos uma letra rectangular tal como o E maiúsculo (figura 5-8). Segundo Snellen esta letra pode ser vista por um olho corrigido se a espessura do traço e de cada espaço entre eles subtenderem um minuto de arco no olho. O ângulo subtendido por uma tal letra é então de 5 minutos verticalmente e 4 a 6 minutos horizontalmente, dependendo do estilo e da letra do alfabeto.

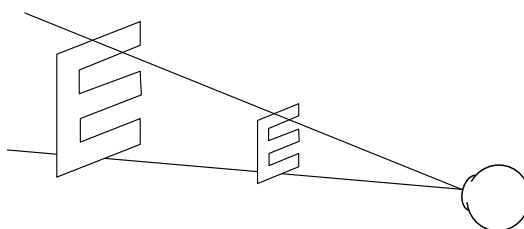


Figura 5 - 8 Um ângulo subtendido constante requer um aumento da dimensão proporcional à distância.

A carta de testes completa contém cerca de 10 linhas de letras numa progressão de tamanhos, cada uma designada pela distância a que a altura total de uma letra subtende 5 minutos, com tamanho do detalhe subtendendo então 1 minuto de arco. A altura total de uma letra de 6 metros subtende 5 minutos de arco a 6 metros. A sua altura deve ser de 8.73 mm, que é a tangente de 5 minutos multiplicada por 6000. Uma letra de 12 metros subtende 5 minutos a 12 metros, ou 10 minutos a 6 metros, logo a sua altura tem de ser o dobro da altura de uma letra de 6 metros e assim sucessivamente.

A acuidade visual pode ser medida de maneiras diferentes e com várias notações. A base de um método que é geralmente aceite é mostrada na figura 5-9, na qual  $h$  é a altura total da letra de teste e  $t$  é

a espessura do traço da letra. Seja  $d$  a distância normal de teste,  $D$  a distância para a qual o traço da letra subtende um ângulo arbitrário  $A_0$  e  $A$  o ângulo subtendido pela espessura do traço da letra mais pequena que pode ser lida, à distância normal de teste.

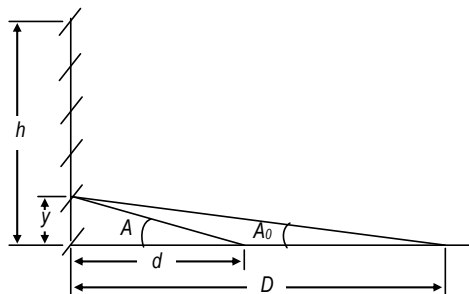


Figura 5 - 9 Derivação da fracção de Snellen  $d/D$ .

A acuidade visual  $V$ , ou “visus”, pode ser expressa como a razão

$$V = \frac{A_0}{A} = \frac{yD}{yd} = \frac{d}{D}$$

esta razão é conhecida como fracção de Snellen. É escrita, por exemplo, como 6/18, 20/200, etc. A fracção de Snellen na notação decimal torna-se equivalente a  $V = 1/A$  onde  $A$  vem em minutos de arco.

### 5.4.3 Variação no estilo das letras e legibilidade

Na figura 5-10 pode ver-se que as letras com o estilo sanserif se apresentam mais proporcionadas numa rede de 5 x 4 do que numa rede de 5 x 5. Numa rede de 5 x 5, o traço da letra O deve ter uma espessura de uma unidade, o espaço central terá um diâmetro de 3 unidades. A mesma letra numa rede 5 x 4 tem um espaço central de 2 unidades, que é maior do que os espaços na letra E.

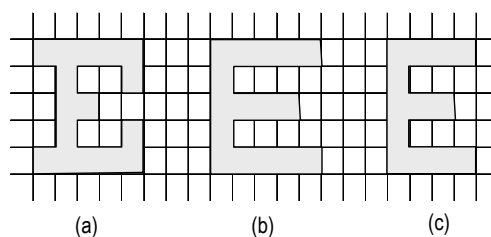


Figura 5 - 10 Letras com diferentes estilos, (a) 5x5 serif E, (b) 5x5 sanserif E, (c) 5x4 sanserif E.

Devido à variação na estrutura das diferentes letras, mesmo que sejam todas desenhadas de modo a preencherem a mesma rede, a sua legibilidade varia. As letras L, T e U, por exemplo, são lidas

com maior facilidade do que as letras B ou G. Letras que são semelhantes na sua forma tendem a confundir-se umas com as outras, tais como C, D, G, O, Q e também H, K, M, N, W.

## 5.5 Visão através de instrumentos ópticos

Utilizam-se instrumentos ópticos para ajudar na visão quando o ângulo que a imagem subtende é muito pequeno para ser resolvido a olho nu, e na astronomia quando a luminância é muito baixa.

O ângulo de resolução mínimo de um olho perfeito ou livre de aberrações, é limitado por dois factores: o primeiro é o disco de Airy formado pelo fenómeno de difracção e o segundo é a sensibilidade do sistema neural/retina. Um olho perfeito que tenha uma pupila com diâmetro de 6 mm tem um ângulo de resolução mínimo tão pequeno quanto 25 segundos de arco, isto se tivermos em conta só o fenómeno de difracção. No entanto isto não sucede já que o sistema neural/retina pode distinguir detalhes tão finos quanto essa medida.

### 5.5.1 Visão com telescópios e prismas binoculares

Consideremos um instrumento cuja objectiva tem uma abertura  $d$ . O seu limite de resolução  $\theta$  para dois pontos vizinhos é dado através da equação já vista atrás

$$\theta(\text{rad}) = 1.22 \lambda / d$$

que representa metade do ângulo subtendido do disco de Airy. Se o instrumento tiver um aumento  $M$  a separação angular  $\theta_i$  de dois pontos na imagem apresentada ao olho é

$$\theta_i = m\theta = 1.22 \lambda m / d = 1.22 \lambda / d'$$

onde  $d'$  representa o diâmetro da pupila de saída (igual a  $d/m$ ).

O ângulo de resolução mínimo  $\theta_o$  de uma hipotética difracção para um olho limitado pela pupila de entrada com diâmetro  $g$  é dado por

$$\theta_o = 1.22 \lambda / g$$

logo

$$\theta_i / \theta_o = g / d'$$

Se  $g$  é mais pequeno que  $d'$ ,  $\theta_1$  é menor que  $\theta_o$ . Isto significa que o aumento do instrumento é insuficiente para tirarmos todas as vantagens da abertura da objectiva. Para que  $\theta_1$  seja maior ou igual do que  $\theta_o$ , a pupila de saída não pode ser maior do que a pupila do olho.

### 5.5.2 Visão com microscópios

O aumento de instrumentos visuais utilizados com objectos próximos é baseado no facto de que o olho não acomodado deve ver um objecto de uma distância de 250 mm. Se o ângulo mínimo de resolução do observador é  $\theta_o$  (em radianos), a correspondente separação (em milímetros) entre dois objectos pontuais resolvidos é

$$h_o = 250\theta_o .$$

então

$$h_o = 0.0727\theta_o$$

para uma objectiva de microscópio de abertura numérica NA, a expressão normal é

$$h(\text{mm}) = 1.22 \lambda / 2NA$$

Para que o olho tire todas as vantagens da resolução superior do instrumento, o seu aumento  $M$  deve igualar  $h$  e  $h_o$ . Esta condição é satisfeita se

$$M = h_c / h \approx 215(NA)\theta_o$$

O diâmetro da pupila de saída dum microscópio,  $d'$ , é dada por

$$d' = 500NA/M$$

normalmente  $d'$  é mais pequena que a pupila do olho.

# Capítulo 6

## Ametropias Esféricas

---

### 6.1 Introdução

Um olho não acomodado que foca os raios de um objecto distante na retina diz-se emétrepe. Pelo contrário quando o olho não acomodado não consegue focar os raios de objectos distantes na retina diz-se ametrepe. Um olho ametrepe é um olho que tem um erro refractivo ou de refacção. Como a causa é um defeito óptico e não funcional é razoável supor que um método de correcção óptica pode ser encontrado.

As ametropias podem ser divididas em duas categorias principais: as ametropias esféricas e as ametropias cilíndricas. Nas ametropias esféricas o sistema refractivo do olho é simétrico em torno do eixo óptico. É capaz de formar uma imagem nítida, mas a retina não está na posição correcta. O comprimento axial do olho e a distância focal não correspondem e a visão é afectada.

#### 6.1.1 Miopia

Se a imagem nítida é formada antes da retina, o erro resultante da refacção é chamado de miopia. O olho miópico pode ser observado como um sistema óptico com excesso de potência para o seu comprimento axial. Num olho míope os raios só serão focados na retina se entrarem divergentes no olho. Assim, o objecto tem de estar a uma distância finita do olho e quanto maior for o erro refractivo mais perto do olho estará o objecto.



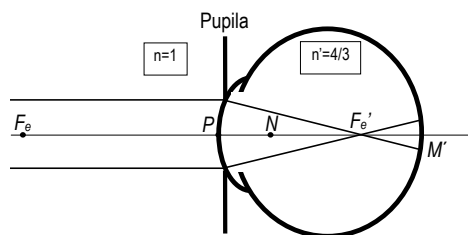


Figura 6- 1 Olho míopico e formação da imagem de raios de um objecto pontual axial distante.

O ponto conjugado com a fóvea do olho não acomodado é chamado ponto remoto ( $PR$ ). A distância desde o ponto principal do olho ( $P$ ) até ao  $PR$  é designado por  $k$ . No olho míope o  $PR$  encontra-se à frente do olho, a uma distância finita deste e é negativa devido à convenção de sinais.

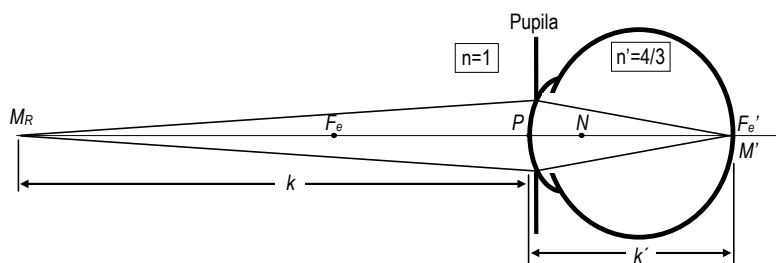


Figura 6- 2 Localização do ponto remoto de um olho míopico não acomodado.

Através de um esforço acomodativo, um míope pode focar objectos a distâncias inferiores ao  $PR$ , mas não a distâncias superiores ao mesmo. O ponto mais próximo do olho até onde se conseguem focar os objectos é chamado ponto próximo ( $PP$ ). Um míope não corrigido possui um espaço de visão nítido restrito. Em casos extremos esse espaço pode ser só de alguns centímetros à frente dos olhos. O míope consegue focar objectos a distâncias inferiores ao normal e formar imagens retinianas maiores que as normais.

### 6.1.2 Hipermetropia

Se o feixe de raios luminosos que entram no olho for interceptado pela retina antes de chegarem ao ponto focal, o erro de refração resultante é chamado hipermetropia. O olho hipermetrope não acomodado, tem uma potência inferior relativamente ao olho normal. O comprimento axial do olho hipermetrópico é pequeno quando relacionado com a potência do olho.

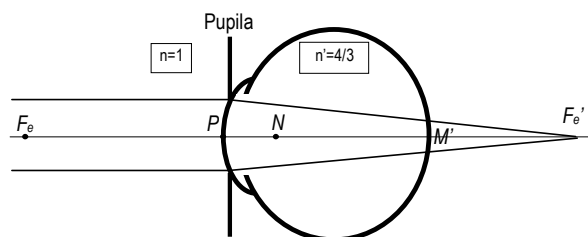


Figura 6- 3 Olho hipermetrópico não acomodado e formação da imagem de raios de um ponto objecto axial distante.

Num olho hipermetrope para que os raios luminosos se foquem na retina têm de entrar no olho de forma convergente. Assim, o ponto remoto do olho hipermetrope é virtual porque se encontra situado atrás do olho.

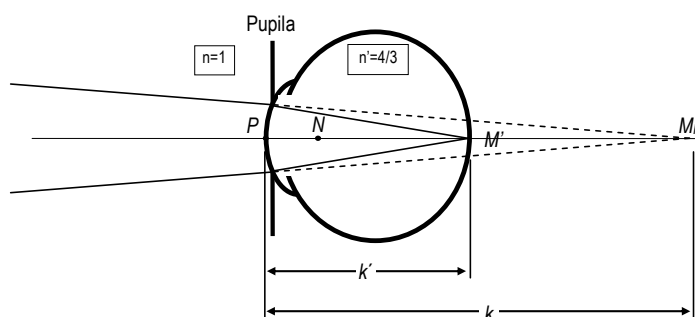


Figura 6- 4 Posição do ponto remoto de um olho hipermetrópico não acomodado.

Sem ser corrigido, um olho hipermetrope não consegue formar imagens nítidas na retina, esteja o objecto a que distância estiver. No entanto se for possível corrigir o erro refractivo, através de um esforço acomodativo, os objectos distantes podem ser focados na retina.

Dependendo da amplitude de acomodação do olho, um hipermetrope pode conseguir focar objectos a uma distância finita do olho, pode só conseguir focar objectos distantes ficando os objectos mais próximos desfocados, ou pura e simplesmente pode acontecer que não consiga focar nada. No primeiro caso o ponto próximo estará à frente do olho, no segundo caso o ponto próximo estará no infinito e no último caso o ponto próximo encontrar-se-á atrás do olho.

### 6.1.3 Refracção Ocular

A refracção ocular, que é igual ao recíproco da distância ao ponto remoto do olho em metros, designada pela letra maiúscula  $K$ , pode ser definida como a distância dióptrica ao ponto remoto do olho. Por exemplo se o  $PR$  de um olho míope estiver situado a 20 cm do ponto principal do olho, então

$$PR = -0.2\text{m} \quad \text{e} \quad K = -\frac{1}{0.2} = -5.00\text{D}$$

sendo o comprimento axial do olho reduzido é designado pela letra  $k'$ , se  $k'$  é a distância imagem então

$$K' = \frac{n'}{k'} \quad (\text{com } k' \text{ em metros})$$

onde  $K'$  é o comprimento dióptrico do olho, e é a vergência imagem necessária para se formar uma imagem nítida na retina.

Para o olho reduzido  $V = U + F_e$ , onde  $U$  e  $V$  são as vergências objecto e imagem, respectivamente. Para se ter uma imagem retiniana nítida, temos que ter  $V = K'$  e o objecto tem de estar situado no ponto remoto do olho. Assim temos que  $u = k$  e  $V = K$  donde resulta que

$$K' = K + F_e \quad \text{ou} \quad K = K' - F_e$$

A refacção ocular é então o comprimento dióptrico do olho subtraindo a sua potência. Para um emétrope como  $K = 0$  vem que  $K' = F_e$ .

### 6.1.4 Ametropias axiais e refractivas

As ametropias, de um modo geral, podem ser divididas quanto à sua origem, em axiais e refractivas. Nas ametropias axiais a potência do olho normal é assumida como sendo +60 D, donde qualquer erro refractivo pode ser atribuído a um erro no comprimento axial do olho. Nas ametropias refractivas o comprimento axial do olho é assumido como 22.22 mm e qualquer defeito é atribuído a um erro na potência do olho.

Para miopias elevadas existe uma tendência para que o globo ocular seja alongado. No entanto um olho maior do que o normal não implica a existência de uma miopia. O crescimento do olho faz-se de uma forma organizada para que a distância focal esteja de acordo com o comprimento axial desse olho.

Se  $K = K' - F_e$ , qualquer variação no valor de  $K'$ ,  $\Delta K'$ , produz uma variação idêntica no erro refractivo ( $\Delta K$ ) se a potência do olho se mantiver constante.

Se  $K' = \frac{n'}{k'}$ , diferenciando obtemos:

$$\frac{dK'}{dk'} = -\frac{n'}{k'^2} = -\frac{n'K'^2}{n'^2} = -\frac{K'^2}{n'}$$

Então  $\Delta K' = -\frac{K'^2}{n'} \Delta k'$  (em metros).

Se  $K' = +60$  D então  $\Delta K' = -2.7 \Delta k'$ . Um aumento de 1 mm no comprimento axial do olho produz uma variação de  $-2.7$  D na ametropia, na direcção da miopia.

### 6.1.5 Lente de Correção

O olho não acomodado forma imagens nítidas para objectos no plano do ponto remoto. Uma lente forma imagens de objectos distantes no plano do 2º foco principal. Assim, um olho está corrigido para visão ao longe, através de uma lente, quando o seu 2º foco principal coincidir com o ponto remoto do olho.

Se a lente estiver em contacto com o olho, a distância focal  $f'_e$  tem de ser igual à distância ao ponto remoto  $k$  e a potência  $F_v$  tem de ser igual a  $K$ . A refração ocular indica então, a potência necessária para a correcção da ametropia a uma dada distância no ponto principal do olho.

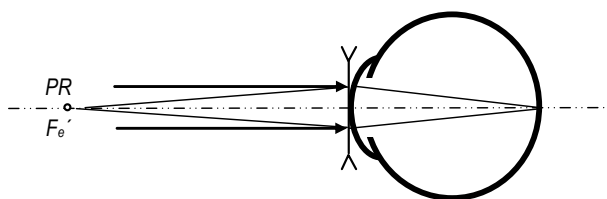


Figura 6- 5 Princípio óptico de correcção de um olho miópico com uma lente de contacto para visão ao longe.

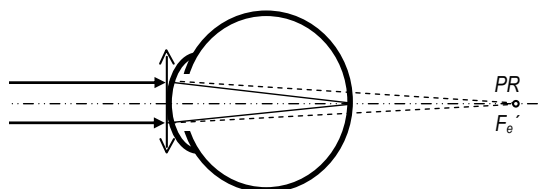


Figura 6- 6 Princípio óptico de correcção de um olho hipermetrópico com uma lente de contacto para visão ao longe.

### 6.1.6 Refracção no Ponto dos Óculos

A potência de uma lente montada em óculos é entendida como a potência do vértice posterior. É definida como a recíproca da distância em metros desde o vértice posterior da lente até ao segundo ponto principal.

A lente de óculos pode ser substituída por uma lente fina equivalente de potência  $F_{sp}$  igual à potência do vértice posterior  $F'_v$  da lente colocada no seu vértice posterior  $A_2$  (figura 6-7).

A posição em que a lente fina deve ser colocada  $A_2$  relativamente ao olho pode ser chamada ponto dos óculos (posição S).

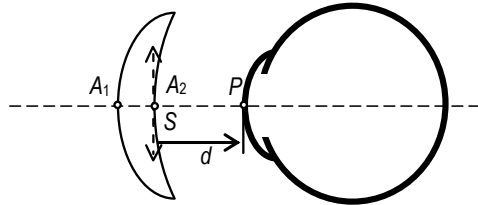


Figura 6- 7 Correção de um olho hipermetrope para longe com uma lente fina, colocada no vértice posterior da lente espessa, com uma potência equivalente à potência do vértice posterior da lente espessa.

A distância  $d$  (positiva) é a distância vertex. Esta distância situa-se regra geral entre 12 e 16 mm do ponto principal do olho reduzido.

A potência da lente dos óculos necessária para corrigir uma dada ametropia é chamada refração dos óculos e pressupõe que o valor da distância vertex seja conhecida.

As figuras 6-8 e 6-9 representam dois olhos, um míope e outro hipermetrope corrigidos para longe com uma lente fina de potência  $F_{sp}$  e distância focal  $f'_{sp}$  com o seu 2º foco principal  $F'$  coincidindo com o ponto remoto do olho.

Para cada um dos casos,

$$k = \overline{PPR} = \overline{PS} + \overline{SF'} = -d + f'_{sp}$$

como a lente dos óculos está colocada no ar

$$K = \frac{1}{k} = \frac{1}{f'_{sp}} = \frac{F_{sp}}{1 - d F_{sp}},$$

$$\text{donde } F_{sp} = \frac{K}{1 + d K}.$$

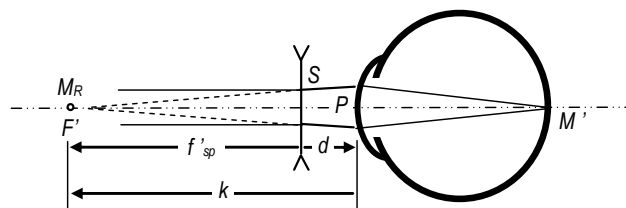


Figura 6- 8 Olho míopico corrigido para longe com uma lente fina.

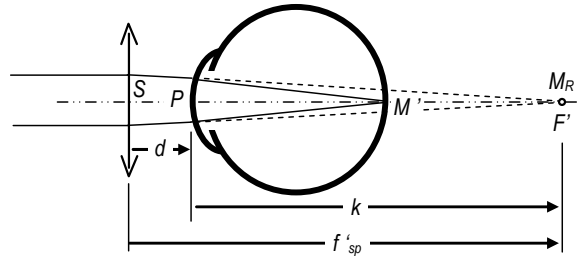


Figura 6- 9 Olho hipermetrópico corrigido para longe com uma lente fina.

### 6.1.7 Mudança da Distância Vertex

Uma prescrição não está completa se especificar só a refração dos óculos ( $F_{sp}$ ). É necessário que a distância ao vértice ( $d$ ) seja indicada.

A modificação da prescrição pode ser deduzida através da seguinte regra: se a lente for deslocada  $x$  mm para uma posição mais perto do ponto remoto do olho, tem que se reduzir a distância focal de  $x$  mm. O inverso também é verdadeiro.

Assim, se  $F_0$  for a potência da lente original e  $F_{sp}$  for a potência modificada necessária quando a distância focal é alterada de  $x$  mm, temos:

$$F_{sp} = \frac{1}{f'_0 \pm x} = \frac{F_0}{1 \pm x F_0} = F_0 \pm x F_0^2 \pm L$$

A alteração de potência necessária é dada por  $(F_{sp} - F_0)$ , donde

$$F_{sp} - F_0 = \pm \frac{x F_0^2}{1000} \quad (x \text{ em milímetros})$$

Usa-se o sinal negativo ou o sinal positivo de acordo com a regra descrita acima.

### 6.1.8 Hipermetropia e acomodação

O olho emétrepe só necessita usar a acomodação quando observa objectos a curtas distâncias. O míope não corrigido só usa a acomodação para ver objectos mais perto que o seu ponto remoto. Por outro lado um olho hipermetrope não corrigido tem que exercer um esforço contínuo de acomodação para ver nitidamente objectos ao longe e um esforço ainda maior para a visão ao perto.

Devido a esta actividade excessiva, o músculo ciliar de um hipermetrope jovem adquire algum grau de tonicidade fisiológica, o que quer dizer que um certo grau de acomodação permanece em jogo e não pode ser relaxada de forma nenhuma. A hipermetropia pode então ser vista como consistindo de duas partes: a hipermetropia manifesta e a hipermetropia latente. O erro manifesto é medido pela lente mais positiva que é aceite em visão ao longe, isto é, a lente mais positiva com a qual a AV permanece no seu nível máximo. O erro latente é a acomodação residual que existe involuntariamente devido ao tono fisiológico.

### 6.1.9 Afaquia

A afaquia é a condição na qual o cristalino está ausente ou em casos raros encontra-se deslocado da área pupilar, não tendo portanto influência no sistema óptico do olho.

A ausência do cristalino pode ser de origem congénita, mas normalmente é devida à extracção por cirurgia (cataratas). Na ausência de outras patologias, ou alterações degenerativas, a remoção do cristalino permite a recuperação de boa visão mas produz uma hipermetropia elevadíssima.

A remoção do cristalino elimina a capacidade do olho acomodar, donde ser necessário que exista uma compensação para o longe e outra mais potente para o perto.

Se a cirurgia às cataratas for realizada num só olho a condição resultante é chamada afaquia unilateral. Este estado refractivo apresenta problemas para a visão binocular (anisometropia elevada).

Para estudar o sistema óptico de um olho afáquico retornamos ao olho esquemático de Gullstrand-Emsley, ao qual se retira o cristalino. O raio de curvatura da córnea é 7.8 mm, o índice de refração dos humores é 1.333 e o comprimento axial do olho emétrepe é 23.89 mm. Assim temos,

$$F_e = \frac{n-1}{r} = \frac{1000}{3 \times 7.8} = +42.73 \text{ D}$$

e

$$K' = \frac{n'}{k'} = \frac{4 \times 1000}{3 \times 23.89} = +55.81 \text{ D}$$

donde

$$K = K' - F_e = +13.08 \text{ D}$$

o que corresponde à potência de uma lente de contacto necessária para corrigir o olho afáquico. Se em vez de lentes de contacto se usar lentes de vidro no ponto dos óculos (regra geral 12 mm do vértice do olho), temos:

$$f'_{sp} = k + d = \frac{1}{13.08} + 12 = 88.45 \text{ mm}$$

e por conseguinte

$$F_{sp} = \frac{1000}{88.45} = +11.31D$$

Inferior à potência de uma lente de contacto equivalente.

### 6.1.10 Imagem retiniana em ametropias corrigidas

No estudo da formação das imagens retinianas quando o olho é corrigido com lentes, devem ser distinguidas duas partes: em primeiro lugar, a lente forma uma imagem real ou virtual independentemente do olho, de acordo com as leis dos focos conjugados. Em segundo lugar, a imagem formada pela lente torna-se objecto para o olho. O objecto será real para o olho se a primeira imagem for formada à frente do olho e será virtual se a primeira imagem se formar atrás do olho.

Na figura 6-10 apresenta-se um olho hipermetrópico não acomodado corrigido para visão ao longe por uma lente de potência  $F_{sp}$ , à distância  $d$  do ponto principal do olho.

Raios paralelos a partir da extremidade  $Q$  de um objecto distante fazem um ângulo  $u_0$  com o eixo óptico e convergem pela acção da lente para formar uma imagem real em  $Q'_1$ , no plano do segundo foco principal  $F'$ .

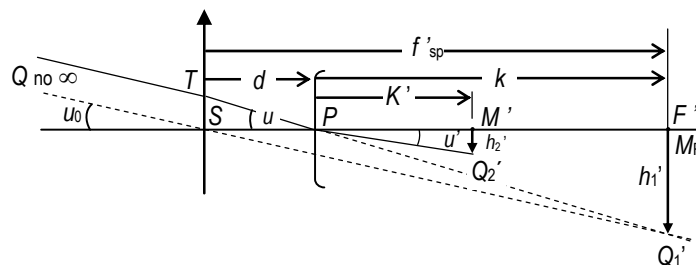


Figura 6- 10 Esquema da formação da imagem retiniana em olhos hipermetrópicos corrigidos.

### 6.1.11 Visão em ametropias esféricas

Se não for corrigida por acomodação, uma dioptria de hipermetropia produz o mesmo grau de desfocagem na imagem em visão longe, que uma dioptria de miopia.

O efeito na visão de uma ametropia esférica não corrigida, pode ser estudado colocando uma série de lentes positivas de potência conhecida em frente de um olho corrigido ou emétrope. Isto significa que o olho é posto artificialmente míope e a visão não pode ser melhorada por acomodação.



Existe alguma evidência que sugere que os míopes podem, como resultado da experiência, adquirir alguma habilidade para interpretar imagens difusas, que podem não ser revelados noutros estados refractivos.

A relação entre a visão sem problemas e a ametropia esférica é aproximadamente linear e pode ser expressa por uma equação da forma

$$\log D = mS + c$$

uma boa aproximação (recta que passa pela média de todos os valores obtidos por vários autores) é uma equação do tipo

$$\log D(\text{metros}) = 0.5S + 0.73 .$$

Pode obter-se uma expressão semelhante para a acuidade visual na forma decimal, isto é

$$\log V = \log d - \log D$$

onde  $d$  é a distância de teste (6 metros). Substituindo-se a equação de  $\log D$  na equação anterior obtém-se

$$\log V = 0.05 - 0.5S$$

As expressões anteriores são aproximações relativamente à média, donde na prática é possível que exista um certo desvio em relação ao valor obtido. Além disso se estivermos a estudar uma miopia que tenha um valor maior que duas ou três dioptrias, a expressão linear entre  $D$  e  $S$  vem então com a forma,  $\log D(\text{metros}) = 0.5S + 0.73$  .

# Capítulo 7

## Astigmatismo

---

### **7.1 Introdução**

A maioria dos olhos apresenta um ligeiro grau de astigmatismo. Para isso contribuem dois factores, em primeiro lugar a córnea não é perfeitamente esférica, mesmo nas imediações do eixo óptico do olho. Estudos efectuados provaram que na infância a córnea tende a ser ligeiramente astigmática, com o meridiano mais potente (curvatura máxima) situado na vertical ou próximo da vertical. O astigmatismo resultante da córnea chama-se astigmatismo corneal e no caso do meridiano mais potente ser o vertical designa-se por astigmatismo corneal segundo a regra, ou directo. No caso do meridiano mais potente ser o horizontal ou perto da horizontal o astigmatismo designa-se contra a regra ou inverso.

A curvatura da superfície posterior da córnea é mais difícil de ser medida, no entanto existem evidências práticas que sugerem que, pelo menos nos casos de astigmatismo corneal bem marcado, ambas as superfícies apresentam a mesma configuração. Isto significa que uma pequena fracção, cerca de uma décima parte, do astigmatismo corneal resultante da superfície anterior é neutralizada pela superfície posterior.

A segunda causa possível de astigmatismo ocular é o cristalino, sendo que cada uma das suas superfícies, ou mesmo ambas, podem ser astigmáticas. Mesmo que as duas superfícies possam ser vistas como sendo esféricas, qualquer descentramento ou inclinação do cristalino relativamente à córnea dá lugar a astigmatismos oblíquos. Seja qual for a causa, qualquer astigmatismo devido ao cristalino é designado por astigmatismo lenticular e é uma componente do astigmatismo total do olho.

## 7.2 Notação axial

Numerosos sistemas foram e continuam a ser usados para especificar um determinado meridiano do olho, com base na direcção do eixo do cilindro corrector e segundo a especificação da base do prisma prescrito.

Para a especificação do eixo do cilindro a maioria dos países adoptou um esquema conhecido como notação padrão, TABO (Technischer Ausschuss für Brillenoptik), ou AXINT (adoptado em 1950 pela Federação Internacional das Sociedades Oftalmológicas). De acordo com este método, um meridiano é especificado pelo ângulo (contrário aos ponteiros do relógio) que faz com a horizontal. A notação pode ser representada graficamente por umas das figuras abaixo, embora a primeira representação seja preferida porque é consistente com o círculo trigonométrico e porque o eixo é especificado entre 0° e 180°. Nas prescrições o símbolo de grau (°) é deliberadamente omitido para que não existam hipóteses de engano, para que, por exemplo 15° não possa ser confundido com 150. Por esse motivo, por convenção, o eixo horizontal é denotado por 180 e não 0.

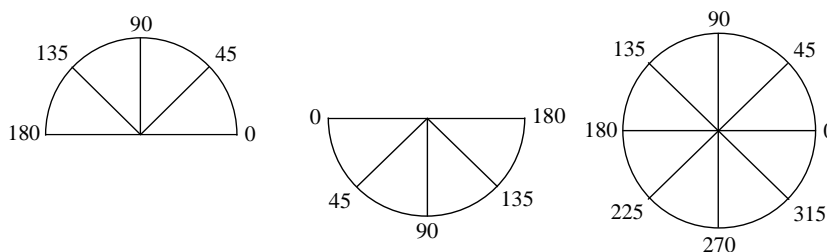


Figura 7- 1 Sistemas de notação axial padrão.

## 7.3 Formação da imagem no olho astigmático

Para a maior parte das finalidades, o astigmatismo ocular pode ser estudado com base no olho reduzido. A única superfície refractora é então considerada como toroidal com diferentes curvaturas e potências em dois meridianos principais mutuamente perpendiculares. Para distinguir os dois meridianos denotaremos o meridiano de maior potência por  $\alpha$  e o de menor potência por  $\beta$ . Assim,

$F_{\alpha}$  = potência do olho no meridiano principal mais potente.

$F_{\beta}$  = potência do olho no meridiano principal menos potente.

Dado um objecto a uma distância dióptrica  $L$ , as vergências imagem após refacção no olho são, respectivamente:

$$L'_{\alpha} = L + F_{\alpha}$$

$$L'_{\beta} = L + F_{\beta}$$

O astigmatismo ocular será então (em módulo) a diferença entre  $F_\alpha$  e  $F_\beta$ . Considerando um feixe de raios luminosos provenientes de um ponto objecto  $B$  situado no eixo óptico a incidir num olho astigmático, verifica-se que os raios incidentes no meridiano vertical  $\alpha$ , de maior potência, irão convergir para um ponto focal  $B'_\alpha$  no eixo óptico, enquanto que os raios incidentes no meridiano horizontal  $\beta$ , de menor potência, irão convergir para um ponto focal  $B'_\beta$  no eixo óptico. Raios incidentes em diferentes pontos do meridiano vertical serão focados no mesmo plano de  $B'_\alpha$  mas a diferentes distâncias do eixo, formando uma linha horizontal, em que  $B'_\alpha$  é o ponto intermédio. Do mesmo modo acontece para o meridiano horizontal, resultando numa linha vertical em que  $B'_\beta$  é o ponto intermédio. Assim, a 1ª linha focal é sempre paralela ao meridiano de menor potência e a última linha focal é sempre paralela ao meridiano de maior potência.

Em termos de dioptrias (e não geometricamente), a meia distância entre as duas linhas focais temos uma secção do feixe de luz com a forma circular. Este círculo é chamado de círculo de confusão mínima (ver figura 7-2). À distância entre as duas linhas focais chama-se intervalo de Sturm. As dimensões das duas linhas focais e o diâmetro do círculo de confusão mínima podem ser calculadas com base na semelhança de triângulos conforme se pode observar na figura 7-3.

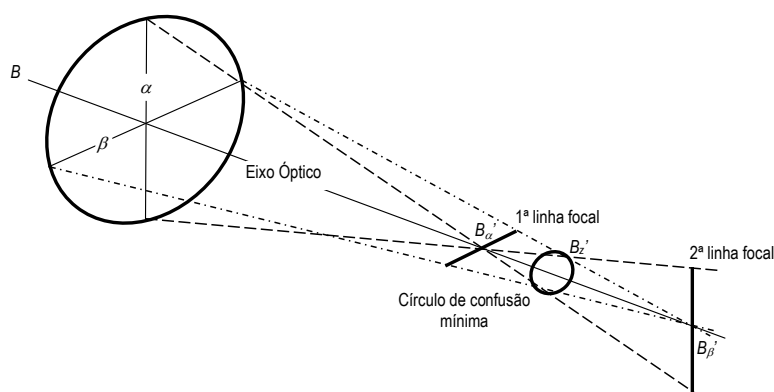


Figura 7- 2 Esquema de um feixe de luz refractado por um olho astigmático, com astigmatismo directo.

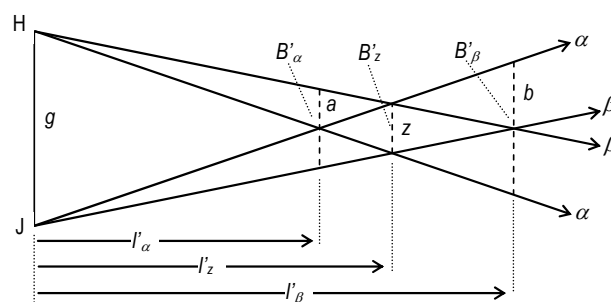


Figura 7- 3 Análise do feixe astigmático refractado por sobreposição das secções cruzadas nos dois meridianos principais.

Os raios no meridiano mais potente (mais convergente) convergem para formarem a 1ª linha focal através de  $B'_\alpha$ , enquanto a segunda linha focal passa através de  $B'_\beta$ . O comprimento dessas duas linhas, denotadas por  $a$  e  $b$  respectivamente, são determinadas pelas secções cruzadas do feixe no outro

meridiano. Torna-se evidente que o círculo confusão mínimo deve ter o seu centro em  $B'_\beta$  onde as secções cruzadas do feixe têm o mesmo comprimento,  $z$ .

Sejam as distâncias de  $B'_\alpha$ ,  $B'_\beta$  e  $B'_z$  desde o ponto principal do olho,  $P$ , denotados por  $l'_\alpha$ ,  $l'_\beta$  e  $l'_z$ , respectivamente e  $g$  denote o diâmetro da pupila. Então, da semelhança entre triângulos temos:

Comprimento da primeira linha focal (a)

$$a = g \frac{l'_\beta - l'_\alpha}{l'_\beta} = g \frac{L'_\alpha - L'_\beta}{L'_\alpha} = g \frac{Ast}{L'_\alpha}$$

Comprimento da segunda linha focal (b)

$$a = g \frac{l'_\beta - l'_\alpha}{l'_\alpha} = g \frac{L'_\alpha - L'_\beta}{L'_\beta} = g \frac{Ast}{L'_\beta}$$

Diâmetro do círculo de confusão mínimo (z)

$$a = g \frac{l'_\beta - l'_z}{l'_\beta} = g \frac{l'_z - l'_\alpha}{l'_\alpha}$$

donde temos

$$L'_z = \frac{L'_\alpha + L'_\beta}{2}$$

e

$$z = g \frac{L'_\alpha - L'_\beta}{L'_\alpha + L'_\beta} = g \frac{Ast}{L'_\alpha + L'_\beta}$$

### Exemplo 7.1

Um olho reduzido com astigmatismo, cujo índice de refração é 4/3 e com um diâmetro de 5 mm, tem uma potência de +62 D no meridiano de 30° e uma potência de 64 D no meridiano de 120°. Determine as características principais da imagem de um ponto objecto axial a uma distância de 1 m do ponto principal do olho.

A linha focal mais horizontal produzida por este olho é a linha relativa ao meridiano de 120°, que é o mais potente, 64.00 D, logo foca antes da linha relativa ao meridiano de 30°. É um astigmatismo misto directo (meridianos de 30° e 120° logo astigmatismo misto e directo uma vez que o meridiano mais vertical

é mais potente que o meridiano mais horizontal). Assim tendo a conta a figura 7.3 podemos afirmar que o meridiano de  $120^\circ$  que produz a linha mais horizontal está relacionado com o meridiano  $\alpha$ , enquanto que o meridiano de  $30^\circ$  está relacionado com o meridiano  $\beta$ . Assim temos:

Para o meridiano  $120^\circ$  ( $\alpha$ )

$L = 1/l = 1/-1 = -1.00$  D (temos que colocar o sinal de menos devido à convenção de sinais, porque está à frente do olho).

$$F_v = +64.00 \text{ D}$$

$$L' = F_v + L = 64.00 - 1.00 = +63.00 \text{ D}$$

$$l' = 1/L' = 1/63.00 = +21.16 \text{ mm}$$

$$a = g \frac{L'_\alpha - L'_\beta}{L'_\alpha} = \frac{5 \times 10^{-3} (63.00 - 61.00)}{63.00} = 0.159 \text{ mm}$$

Para o meridiano de  $30^\circ$  ( $\beta$ )

$L = 1/l = 1/-1 = -1.00$  D (temos que colocar o sinal de menos devido à convenção de sinais, porque está à frente do olho).

$$F_v = +62.00 \text{ D}$$

$$L' = F_v + L = 62.00 - 1.00 = +61.00 \text{ D}$$

$$l' = n'/L' = (4/3) \times 61.00 = +21.86 \text{ mm}$$

$$b = g \frac{L'_\alpha - L'_\beta}{L'_\beta} = \frac{5 \times 10^{-3} (63.00 - 61.00)}{61.00} = 0.164 \text{ mm}$$

Para o círculo de confusão mínima

$$L'_z = \frac{L'_\alpha + L'_\beta}{2} = \frac{63.00 + 61.00}{2} = 62.00 \text{ D}$$

$$l'_z = n'/L'_z = (4/3) \times 62.00 = +21.50 \text{ mm}$$

$$z = g \frac{L'_\alpha - L'_\beta}{L'_\alpha + L'_\beta} = 5 \times 10^{-3} \left( \frac{63.00 - 61.00}{63.00 + 61.00} \right) = 0.81 \text{ mm}$$

Assim as características da imagem de um ponto objecto situado a 1 m de distância do olho astigmático são  $a = 0.159 \text{ mm}$ ;  $b = 0.164 \text{ mm}$  e  $z = 0.81 \text{ mm}$ . De notar que quando as linhas focais são aproximadamente do mesmo tamanho elas têm sensivelmente o dobro da dimensão do círculo de confusão mínima.

## 7.4 Classificação do astigmatismo

A classificação do astigmatismo no olho não acomodado está baseada na posição da retina relativamente às linhas focais do feixe refractado (ver figura 7.4).

Dando um ponto objecto distante, cada uma das duas linhas focais está situada no ponto principal do meridiano correspondente, isto é,  $F'_\alpha$  e  $F'_\beta$ .

Existem assim cinco possibilidades diferentes para classificar o astigmatismo.

- 1- Astigmatismo Hipermetrópico Composto (AHC): As duas linhas focais estão situadas atrás da retina ou o que é o mesmo, a retina está situada em frente da 1ª linha focal.
- 2- Astigmatismo Hipermetrópico Simples (AHS): A 1ª linha focal está situada na retina e a 2ª linha focal está situada atrás da retina, ou ainda, a retina coincide com a primeira linha focal.
- 3- Astigmatismo Misto: A retina está situada entre as duas linhas focais, a 1ª linha focal está situada antes da retina e a 2ª linha focal está situada depois da retina.
- 4- Astigmatismo Miópico Simples (AMS): A 2ª linha focal coincide com a retina, enquanto a 1ª linha focal está situada antes de retina, ou ainda simplesmente, a retina coincide com a 2ª linha focal.
- 5- Astigmatismo Miópico Composto (AMC): As duas linhas focais estão situadas atrás da retina, ou a retina está depois da 2ª linha focal.

Estas cinco situações podem ser representadas na figura 7.4.

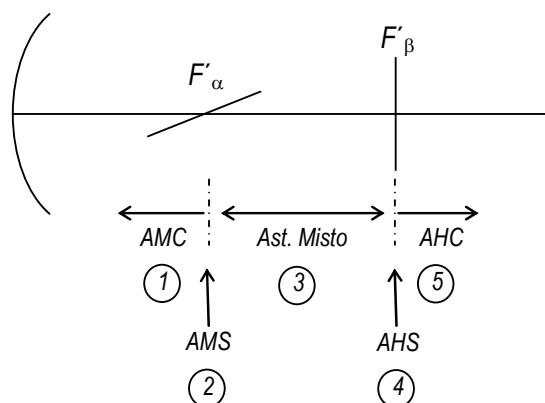
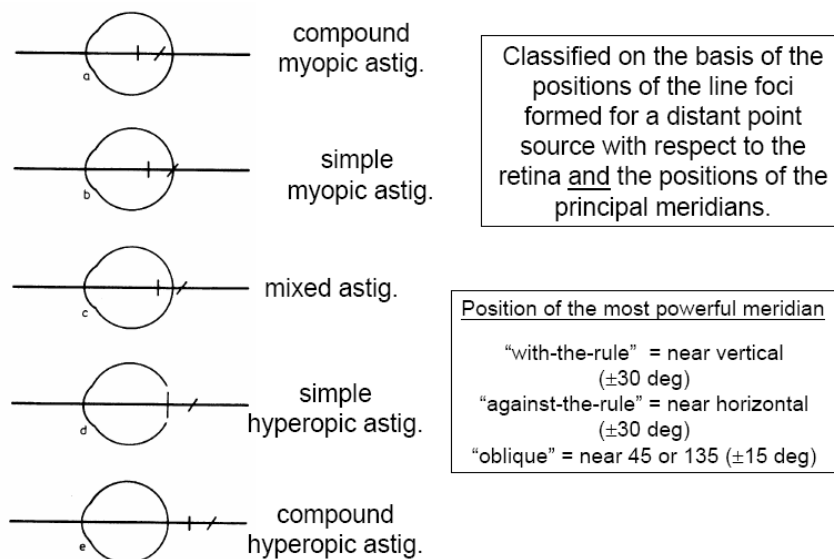


Figura 7- 4 Representação esquemática da classificação do astigmatismo.

### Classification of Astigmatism



from Obstfeld, 1982

Figura 7- 5 Esquema representando as linhas focais nos vários casos da classificação do astigmatismo.

## 7.5 Lentes correctoras para longe

Para cada um dos dois meridianos principais correspondentes, de um olho não acomodado e astigmático, existe um ponto remoto diferente. A lente de correcção deve ser astigmática, sendo que os seus meridianos devem estar alinhados com os do olho e as potências principais coincidirem, em cada um dos casos, com o ponto remoto correspondente.

Tal como nas ametropias esféricas, a refração ocular  $K$  de um olho não acomodado astigmático representa a potência de lente de correcção em contacto com o olho.

### Exemplo 7.2

Um olho astigmático tem potências principais de  $+64.00$  D ao longo do eixo de  $60^\circ$  e  $+68.00$  D ao longo do eixo de  $150^\circ$ . O comprimento dióptrico  $K'$ , é  $+61.00$  D. Qual é a sua refração ocular?

O eixo de  $150^\circ$  sendo o mais potente ( $+68.00$  D) é o que produz a 1ª linha focal, neste caso a linha focal horizontal correspondente, ao passo que a 2ª linha focal, vertical, é produzida pelo meridiano menos potente que é o de  $60^\circ$  ( $+64.00$  D). Neste caso estamos em presença de um astigmatismo misto inverso. Os meridianos são  $60^\circ$  e  $150^\circ$ , e inverso porque o meridiano mais potente é o horizontal e o menos potente é o vertical. O meridiano associado ao meridiano  $\alpha$  é o meridiano de  $60^\circ$ , enquanto que o meridiano associado ao meridiano  $\beta$  é o meridiano de  $150^\circ$ .



Para o eixo de 60°

$$K' = +61.00 \text{ D}$$

$F_e = +64.00 \text{ D}$ , como  $K' = K + F_e$  vem que a refração ocular  $K$ , é:

$$K = K' - F_e \text{ então temos}$$

$$K = +61.00 - 64.00 = -3.00 \text{ D}$$

Para o eixo de 150°

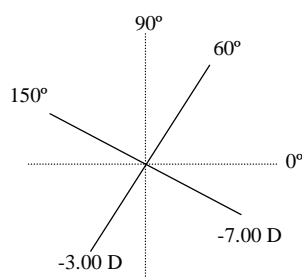
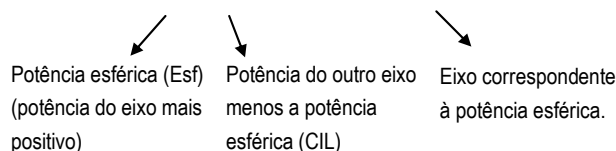
$$K' = +61.00 \text{ D}$$

$$F_e = +68.00 \text{ D},$$

$$K = K' - F_e \text{ então temos } K = +61.00 - 68.00 = -7.00 \text{ D}$$

A refração ocular é expressa como

$$K = \text{Esf} \text{ Cil} \times \text{Eixo do meridiano da Esf}$$



$$-7.00 - (-3.00) = -4.00 \text{ D} \text{ (correspondendo à potência cilíndrica)}$$

$$\text{donde } K = -3.00 \text{ D} - 4.00 \text{ D} \times 60^\circ.$$

Esta é a lente de correcção necessária para uma lente em contacto com o olho. A lente para a distância ao vértice (14 mm) não será esta lente. Temos 14 mm de intervalo entre o olho e as lentes dos óculos. Então teremos:

Para o meridiano de 60°

$$K = -3.00 \text{ D}$$

$$k = 1/K = -333.3 \text{ mm}$$

$d = 14 \text{ mm}$ , tendo a presente a figura 7.6 temos que:

$$k + d = f_{sp}$$

$$f_{sp} = -333.3 + 14 = -319.3 \text{ mm}$$

$$F_{sp} = 1/f_{sp} = 1/-0.3193 = -3.13 \text{ D}$$

Para o meridiano de 150°

$$K = -7.00 \text{ D}$$

$$k = 1/K = -142.9 \text{ mm}$$

$$d = 14 \text{ mm},$$

$$k + d = f_{sp}$$

$$f_{sp} = -333.3 + 14 = -128.9 \text{ mm}$$

$$F_{sp} = 1/f_{sp} = 1/0.1283 = -7.76 \text{ D}$$

A potência da lente correctora será então:  $-3.13 \text{ D}$  correspondente à potência esférica e  $-7.76 - (-3.13) = -4.63 \text{ D}$  correspondendo à potência cilíndrica. Então temos:

$$K = -3.13 \text{ D} - 4.63 \text{ D} \times 60^\circ$$

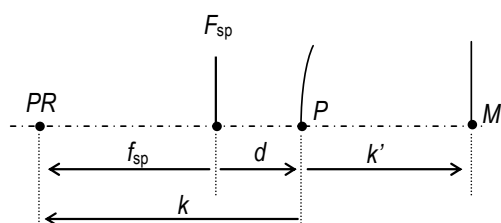


Figura 7- 6 Esquema representando o caso de um míope, onde se mostra o ponto remoto (PR), a distância focal da lente ( $f_{sp}$ ), a distância do olho à lente dos óculos ( $d$ ) e a distância que vai desde o ponto principal do olho até ao ponto remoto do mesmo olho ( $k$ ).

Exemplo 7.3

Uma prescrição apresenta  $+12.50 +3.50 \times 170$  a 14. Que potências serão associadas a 12 mm?

A prescrição indica que a lente a utilizar a 14 mm terá de ter uma potência no meridiano de  $170^\circ$  de  $+12.50 \text{ D}$  e no meridiano perpendicular  $80^\circ$  uma potência de  $+16.00 \text{ D}$  ( $12.50 + 3.50$ ). É um astigmatismo directo ou segundo a regra (meridiano mais vertical dentro dos limites de  $75^\circ - 105^\circ$  e meridiano mais vertical mais potente que o horizontal). Assim temos que:

No meridiano de  $80^\circ$ 

$f_{sp} = 1/F_{sp} = 1/16.00 = +62.50 \text{ mm}$ , diminuindo 2 mm para passar de 14 mm para 12 mm temos um novo  $f_{sp}$ .

$$\text{Para } 12 \text{ mm } f_{sp} = +62.50 - 2.00 = +60.50 \text{ mm}$$

$$\text{Para } 12 \text{ mm } F_{sp} = 1/0.0605 = +16.53 \text{ D}$$

No meridiano de 170°

$f_{sp} = 1 / F_{sp} = 1 / 12.50 = +80.00$  mm, diminuindo 2 mm para passar de 14 mm para 12 mm temos um novo  $f_{sp}$ .

Para 12 mm  $f_{sp} = +80.00 - 2.00 = +78.00$  mm

Para 12 mm  $F_{sp} = 1 / 0.078 = +12.82$  D

Assim temos que para a nova distância de 12 mm:  $+12.82 + 3.71 \times 170^\circ$  a 12. Ou arredondando por múltiplos de 0.25 D temos finalmente:  $+12.75 + 3.75 \times 170^\circ$  a 12.

## 7.6 Visão em astigmatismo não corrigido

A visão em olhos astigmáticos é afectada por três factores diferentes nomeadamente: a quantidade de astigmatismo, o tipo de astigmatismo e a direcção do eixo do astigmatismo.

### 7.6.1 Quantidade de astigmatismo

A partir das equações que nos dão o comprimento das linhas focais e do círculo de confusão mínima temos que as dimensões das linhas focais e do círculo de confusão mínima do feixe astigmático são directamente proporcionais à quantidade de astigmatismo em dioptrias ( $F'_\alpha - F'_\beta$ ), com todas as outras variáveis se mantiverem inalteradas.

### 7.6.2 Tipos de astigmatismo

Se considerarmos um feixe de raios proveniente de um ponto objecto distante, a incidir na pupila do olho, a mancha produzida na retina depende da secção transversal do feixe astigmático que se produz na retina e da forma como a acomodação pode melhorar, ou não, a imagem retiniana.

A refração ocular média, que denota o erro médio dos erros refractivos nos dois meridianos do olho astigmático, dá a posição do círculo de confusão mínima, em função da ametropia. Por exemplo  $-1.00 - 2.00 \times \phi$ , indica uma miopia de  $-1.00$  D no meridiano principal de  $\phi$  e uma miopia de  $-3.00$  D no meridiano de  $\phi + 90^\circ$ .

No astigmatismo miópico simples e composto a visão ao longe não pode ser melhorada através da acomodação, visto que se for empregue a acomodação o erro refractivo aumenta em vez de diminuir.

Nas situações em que o astigmatismo é hipermetrópico simples ou composto, o indivíduo pode colocar na retina a secção transversal mais favorável do feixe astigmático através da sua acomodação (a que estiver disponível). Se supusermos que o círculo de confusão mínima foi colocado na retina, isto é, o círculo de confusão está no foco, a equação vista na secção 7.3 que dá o diâmetro do círculo de confusão mínima,  $z$ , é dada por:

$$z = \frac{g Ast}{L'_\alpha + L'_\beta}$$

mas como a média das duas vergências imagens  $L'_\alpha$  e  $L'_\beta$  devem ser igual ao comprimento dióptrico do olho,  $K$ , vem então que:

$$z = \frac{g Ast}{2K'}$$

Se tivermos uma ametropia esférica temos que o diâmetro do círculo de confusão,  $j$ , no olho não acomodado é dada por:

$$j = \frac{g K}{K'}$$

então para o mesmo diâmetro da pupila do olho, o círculo de confusão dado por  $x$  D de astigmatismo é só metade da dimensão do círculo de confusão dado pela mesma quantidade da ametropia esférica. Isto é útil quando se quer estimar a quantidade de astigmatismo: o astigmatismo para o caso da ametropia esférica é o dobro do astigmatismo. Por exemplo uma visão de 0.3 (6/18) indica uma ametropia esférica próxima de 1.00 D, ou um astigmatismo cerca de 2.00 D (assumindo que a parte mais favorável do feixe astigmático está situado na retina).

Se um olho não acomodado tem astigmatismo misto, só uma das linhas focais pode ser colocada na retina, porque tem uma linha focal antes da retina e outra depois da retina, uma é miópica e outra hipermetrópica e só a hipermetrópica, pode com a ajuda da acomodação, ser colocada em foco na retina. Este astigmatismo depende muito da posição do círculo de confusão mínima, que pode estar atrás ou à frente da retina de acordo com a refacção ocular média, isto é, se estamos do lado da miopia ou do lado da hipermetropia.

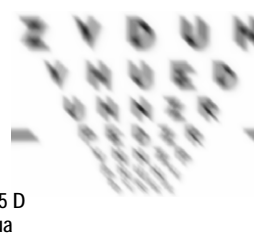
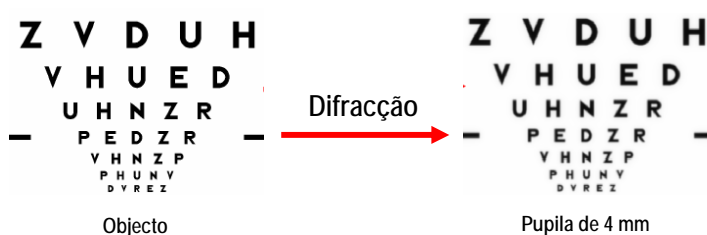
### 7.6.3 Direcção do eixo

Como as linhas verticais e horizontais são as predominantes nas letras utilizadas para testes de visão, bem como na maior parte dos objectos que nos rodeiam, a visão é mais baixa (pobre) quando o

astigmatismo ocular é oblíquo (está segundo um eixo oblíquo) com os outros factores permanecendo invariáveis.

No que diz respeito às letras minúsculas impressas, não existe dúvida que os traços verticais são colectivamente os mais importantes. Os traços verticais nas letras *b*, *d*, *h*, *t*, *p* e *y* são importantes para o reconhecimento destas letras. Outro factor importante é que as letras impressas, numa linha, têm o mesmo espaçamento entre elas, que as letras impressas entre linhas. Consequentemente. Se as linhas focais horizontais ou as elipses se formarem na retina, as letras não são vistas ou identificadas. Elas tornam-se indistintas ou indistinguíveis parecendo todas juntas.

A melhor maneira de se ver o efeito do astigmatismo não corrigido é simular com óculos de prova, os vários casos dos erros refractivos, ou através de fotografias ou figuras que evidenciem ou simulem os vários casos de astigmatismo variando só o eixo do astigmatismo.



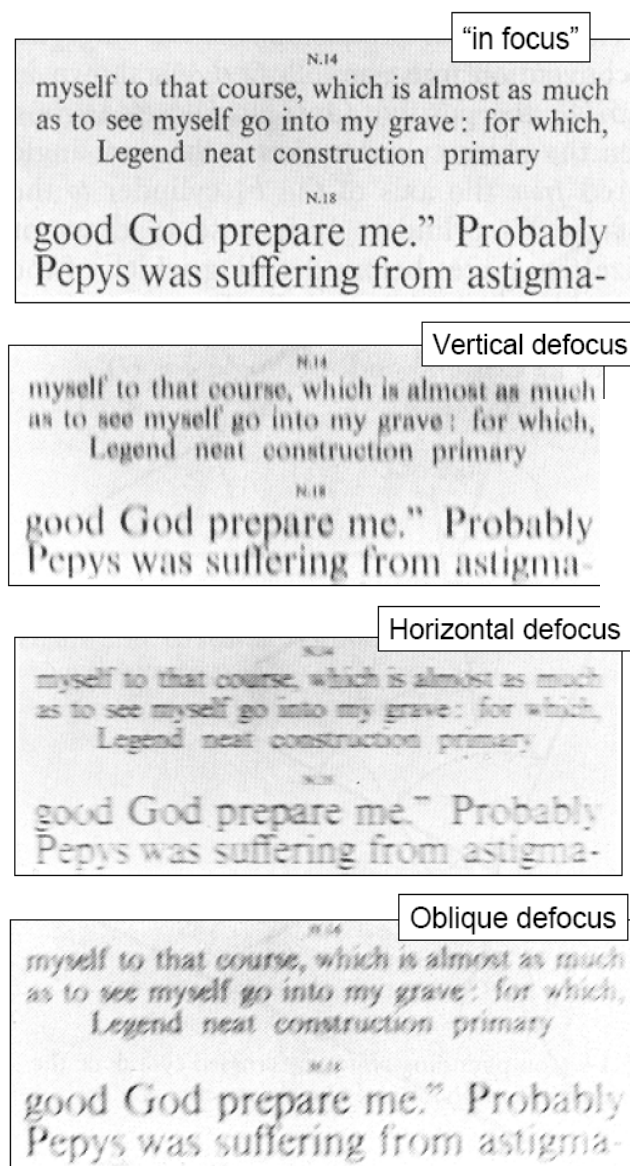


Figura 7- 7 Ilustrações dos vários tipos de casos de astigmatismo e a sua influência na visão das letras.

# Capítulo 8

## Acomodação e visão próxima

---

### 8.1 Introdução

O olho jovem é capaz de alterar a sua potência refractiva através de alterações na curvatura das superfícies do cristalino (lente cristalino). O aumento da potência no cristalino é conhecido como acomodação. Num estado não acomodado, o músculo ciliar está relaxado, a zónula de Zinn que sustém o cristalino está no seu estado de máxima tensão, donde as superfícies do cristalino estão na sua forma mais plana e a retina é conjugada com o ponto remoto do olho,  $M_R$ . No estado acomodado o músculo ciliar está contraído, relaxando a zónula de Zinn e permitindo ao cristalino adoptar a sua forma convexa. No estado totalmente acomodado a retina é conjugada com o ponto próximo do olho,  $M_P$ . A distância linear que vai desde o ponto próximo (de acomodação) até ao olho é dada por  $b$  e a distância dióptrica ( $1/b$ ) por  $B$ . O máximo esforço acomodativo é chamado amplitude de acomodação ( $Amp$ ).

O que acaba de ser afirmado está baseado na aproximação clássica da acomodação. Deste ponto de vista o olho diz-se relaxado quando não existe nenhuma acomodação presente. A figura 8.1 apresenta os pontos remoto e o ponto próximo de acomodação (ou simplesmente pontos remoto e próximo) de um olho emétrepe, enquanto na figura 8.2 temos um olho míope.

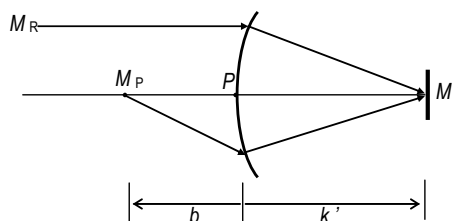


Figura 8- 1 Ponto remoto e ponto próximo de acomodação,  $M_R$  e  $M_P$  respectivamente, de um olho emétopo.

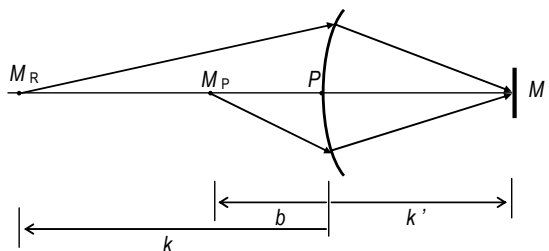


Figura 8- 2 Ponto remoto e ponto próximo de acomodação,  $M_R$  e  $M_P$  respectivamente, de um olho míope.

No caso geral temos as relações seguintes:

Para o olho não acomodado (relaxado)

$$K' = K + F_e$$

Para o olho totalmente acomodado

$$K' = B + (F_e + Amp)$$

donde

$$Amp = K' - F_e - B.$$

Como  $Amp = K - B$ , vem que  $B = K - Amp$ .

Nos olhos emétopes e míopes, o ponto próximo é invariante e real (está sempre à frente do olho) sendo  $b$  negativo devido à convenção de sinais, tal como é mostrado na figura 8.1. No olho hipermetrope, o ponto próximo pode ser real, virtual ou estar no infinito, dependendo da amplitude de acomodação. Se a amplitude de acomodação for maior que a distância refractiva correspondente ao erro refractivo do olho, temos que o ponto próximo é real, porque se situa à frente do olho. Se a amplitude de acomodação for igual à distância refractiva correspondente ao erro refractivo do olho, então o ponto



próximo está situado no infinito. Finalmente, no caso da amplitude de acomodação ser menor que o erro refractivo do olho, então o ponto próximo estará forçosamente atrás da retina sendo portanto virtual.

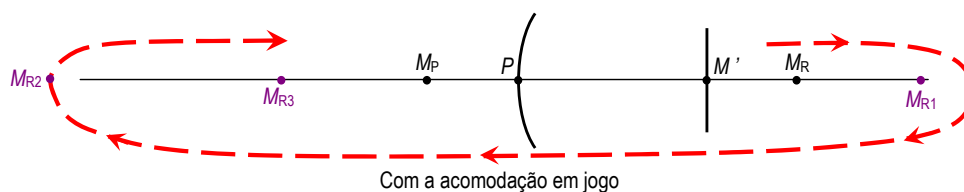


Figura 8- 3 Percurso do ponto remoto para um hipermetrope, quando se põe em jogo a amplitude de acomodação.  $M_R$  é o ponto remoto do hipermetrope (virtual, atrás da retina),  $M_{R1}$  é o ponto remoto quando se começa a acomodar (ainda virtual, porque atrás da retina),  $M_{R2}$  é a posição em que o ponto remoto devido à acomodação se encontra no infinito e  $M_{R3}$  é a posição do ponto remoto na posição correspondente à máxima acomodação (real porque está à frente do olho).

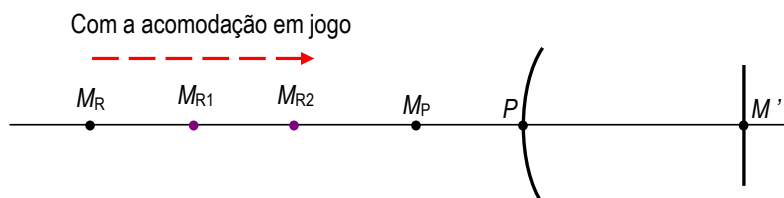


Figura 8- 4 Percurso do ponto remoto para um míope, quando se põe em jogo a amplitude de acomodação.  $M_R$  é o ponto remoto do míope (real, à frente da retina),  $M_{R1}$  é o ponto remoto quando se começa a acomodar (real, porque à frente da retina) e  $M_{R2}$  é a posição do ponto remoto na posição correspondente à máxima acomodação (sempre real porque está sempre à frente do olho).

Outra noção que se deve ter é a de percurso de acomodação. O percurso de acomodação é a distância linear que vai desde o ponto remoto até ao ponto próximo. Assim, um percurso de acomodação de 8 D para um olho emétrepe diz-nos que o ponto próximo está a 1/8 mm do olho, isto é, -0.125 mm do ponto principal do olho. Neste caso diz-se que o percurso de acomodação vai desde o infinito (por ser emétrepe) até 0.125 mm à frente do olho.

### Exemplo 8.1

Qual o percurso de acomodação de um olho não corrigido míope de -4.00 D cuja amplitude de acomodação é +10 D?

$$k = \frac{1}{-4} = -0.25 \text{ m} = -250 \text{ mm}$$

$$B = K - Amp = -4 - 10 = -14 \text{ D}$$

$$b = \frac{1}{-14} = -7.14 \text{ mm}$$

Assim, enquanto a amplitude de acomodação é 10 D (a amplitude é sempre positiva) o percurso de acomodação vai desde 250 mm à frente do olho, até 7.14 mm à frente do olho.

## 8.2 Acomodação ocular e nos óculos

Na prática a maioria das medições é referida ao plano dos óculos. Assim, em geral, determina-se a refração no ponto dos óculos e não a refração ocular. Considerando o objecto próximo  $B$  a uma distância  $l_s$  do ponto dos óculos  $S$ , um feixe paraxial desde  $B$  terá uma vergência  $L_s$  que é igual a  $1/l_s$  no ponto dos óculos (ver figura 8.5).

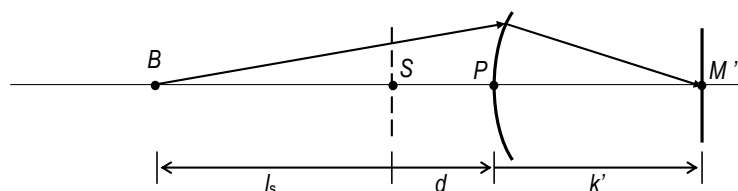


Figura 8- 5 Distância  $l_s$  de um objecto próximo medido a partir do ponto dos óculos .

Adicionando uma lente positiva de potência  $L_s$ , o raio proveniente de  $B$  passa a ser paralelo ao eixo óptico, como se viesse do infinito (ver figura 8.6).

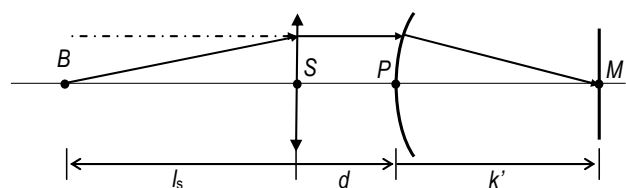


Figura 8- 6 Adição de uma lente positiva de potência  $L_s$ , tornando o raio proveniente de  $B$  paralelo ao eixo.

Esta lente hipotética compensará as necessidades de acomodação, donde a sua potência será uma medida da acomodação no plano dos óculos.

Se denotarmos a amplitude no ponto dos óculos por  $A_s$  teremos então:

$$A_s = -L_s$$

Devido à separação lente-olho, a acomodação ocular requerida  $A$  difere em geral da acomodação no plano dos óculos. Na maioria das vezes de uma quantidade ainda significativa. Se  $d$  é a distância ao vértice, que é a distância positiva do ponto dos óculos ao ponto principal do olho, no caso mais simples do olho emétrepe (figura 8.5), a distância objecto  $PB$  medida a partir do olho vem:

$$PB = PS + SB = -d + l_s$$

### Exemplo 8.2

Para  $l_s = -250$  mm e  $d = 14$  mm, qual será a distância ao ponto próximo medido a partir do ponto principal do olho?

Se  $l_s = -250$  mm e  $d = 14$  mm, então  $PB = -14 - 250 = -264$  mm, dando

$$L_s = \frac{1}{l_s} = -\frac{1}{0.25} = -4 \text{ D}, \text{ então a refração dos óculos vem:}$$

$$A_s = -L_s = +4.00 \text{ D}$$

e

$$A = -\left(-\frac{1}{0.264}\right) = +3.79 \text{ D que é a refração ocular.}$$

Então para um emétrepe, a acomodação ocular é menor que a acomodação dos óculos.

Em visão ao longe, a vergência no ponto principal dos olhos é igual à refração ocular  $K$ . Em visão ao perto, os raios provenientes do ponto  $B$  incidem no olho com vergência  $L$  que é numericamente menos positiva ou mais negativa que  $K$ . Para imagens retinianas focadas, a potência do olho deve então ser aumentada de  $K - L$ . A refração ocular requerida é então dada por:

$$A = K - L$$

A figura 8.5 ilustra o caso de um olho míope corrigido por uma lente fina de potência  $F_{sp}$  (negativa).

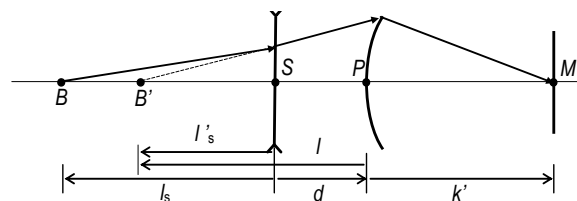


Figura 8- 7 Olho míope corrigido por uma lente (óculos) de potência  $F_{sp}$  observando um objecto próximo  $B$ .

A acomodação requerida pode ser calculada através de um método passo a passo como se pode inferir no Exemplo 8.3 apresentado abaixo.

### Exemplo 8.3

Um olho míope está corrigido por uma lente fina de  $-4.00\text{ D}$  a uma distância ao vértice de  $14\text{ mm}$ . Um objecto próximo é observado a  $350\text{ mm}$  do ponto principal do olho. Compare a acomodação ocular com a acomodação dos óculos e a que é requerida por um emétrope para focar o mesmo objecto.

A distância do ponto principal ao objecto é  $-350\text{ mm}$  (convenção de sinais: à frente do olho). A acomodação no ponto dos óculos vem:

$$A_s = -L_s \Rightarrow L_s = \frac{1}{l_s}$$

$$l_s = +14 - 350 = -336\text{ mm}$$

$$L_s = -\frac{1}{336} = -2.98\text{ D} \Rightarrow A_s = +2.98\text{ D}$$

para visão ao longe

$$F_{sp} = -4.00\text{ D}, \text{ mas como } k = f_{sp} + d \text{ vem}$$

$$k = -250 - 14 = -264\text{ mm onde}$$

$$K = \frac{1}{k} = -\frac{1}{264} = -3.79\text{ D}$$

para visão ao perto

$$L_s = -2.98\text{ D}, f_{sp} = -4.00\text{ D}, \text{ donde}$$

$$L'_s = -2.98 - 4.00 = -6.98\text{ D então}$$

$$l'_s = -\frac{1}{6.98} = -143.27\text{ mm, como } d = 14\text{ mm vem então}$$

$$l = -14 - 143.27 = -157.27\text{ mm, donde}$$

$$L = \frac{1}{l} = -\frac{1}{157.27} = -6.36\text{ D}$$

A refração ocular virá então  $A = K - L = -3.79 + 6.36 = 2.57\text{ D}$

Para um emétrope (sem nenhuma lente entre o objecto e o olho) se o objecto está a  $350\text{ mm}$  do olho a acomodação ocular será então,  $A = \frac{1}{350} = +2.86\text{ D}$

Em resumo temos:

Acomodação nos óculos: +2.98 D

Acomodação ocular: +2.57 D

Acomodação para o olho emétrope: +2.86 D

### 8.3 Adição ao perto

A primeira coisa a saber é conhecer qual a acomodação disponível, a qual pode ser determinada na prática ou então recorrer ao uso de tabelas com valores esperados para uma determinada idade. Na tabela 8.1 temos os valores esperados para a amplitude de acomodação, relativamente à idade do indivíduo.

Tabela 8- 1 Amplitude de acomodação esperada e adições aproximadas para várias idades.

Idade	Amplitude de acomodação esperada (D)	Adição ao perto (D)
20	10	-
30	8	-
40	6	-
45	4	0.00 – 1.00
50	2	1.00 – 1.75
55	1	1.50 – 2.25
60	1	1.75 – 2.50

A 3ª coluna dá aproximadamente uma adição que deve ser incorporada antes da amplitude ser inserida. Deve ser notado que a adição prescrita depende da distância de trabalho do paciente e da actual amplitude de acomodação e nunca só na idade.

Uma regra é que se deve manter sempre metade da amplitude de acomodação de reserva (disponível). Assim, temos que:

$$Add = -L_s - 1/2 Amp_s$$

A distância de trabalho mais comum situa-se entre 380 e 450 mm, dando um valor médio para  $L_s$  da ordem de -2.50 D.

Face às diferenças entre a acomodação dos óculos e a acomodação ocular, qual deve ser a adição ao perto a prescrever? A esta pergunta podemos responder que a adição baseada numa fracção

particular da amplitude no ponto dos óculos é quase exactamente a fracção da amplitude ocular. No exemplo que se segue vamos ver o que acabamos de afirmar em mais pormenor.

#### Exemplo 8.4

Um olho está corrigido para visão ao longe com +4.00 D esféricas a 14 mm do ponto principal do olho. A amplitude de acomodação nos óculos é 3.00 D e a distância de trabalho é 400 mm a partir do plano dos óculos. Qual é a adição teórica necessária e qual a amplitude ocular que deve ser colocada em uso?

$$l_s = -400 \text{ mm} \Rightarrow L_s = -2.50 \text{ D onde}$$

$$Add = -L_s - 1/2 Amp_s = 2.50 - 1.50 = +1.00 \text{ D}$$

A refração ocular  $K$  é dada por:

$$F_{sp} = +4.00 \text{ D} \Rightarrow f'_{sp} = +250 \text{ mm (atrás da retina)}$$

$$d = 14 \text{ mm onde}$$

$$k = 250 - 14 = 236 \text{ mm o que vem}$$

$$K = \frac{1}{k} = \frac{1}{236} = +4.24 \text{ D}$$

Com uma adição de +1.00 D em uso, a correcção ao perto deve ser

$$F_M = +4.00 + 1.00 = +5.00 \text{ D logo em visão próxima a -400 mm dos óculos temos}$$

$$L_s = -2.50 \text{ D}$$

$$F_M = +5.00 \text{ D então}$$

$$L'_s = L_s + F_M = +2.50 \text{ D resultando}$$

$$l'_s = +400 \text{ D sendo a distância } l \text{ para determinar } L \text{ a seguinte :}$$

$$l = 400 - 14 = 386 \text{ mm e}$$

$$L = +2.59 \text{ D}$$

A acomodação ocular em uso é  $K - L$  donde vem:

$$Acc = +4.24 - 2.59 = +1.65 \text{ D}$$

A amplitude de acomodação nos óculos é +3.00 D, donde o objecto deve ser colocado a uma distância dióptrica de -3.00 D do plano dos óculos, com a distância de correcção em uso. Assim consequentemente, traçando o feixe de raios incidente no olho, onde a sua vergência é a distância dióptrica  $B$  relativamente ao ponto próximo do olho, temos:

$$L_s = -3.00 \text{ D}$$

$$F_{sp} = +4.00 \text{ D onde}$$

$$L'_s = L_s + F_{sp} = +1.00 \text{ D resultando}$$

$l'_s = +1000 \text{ mm}$ , o que adicionado (neste caso como a medida é feita inversamente ao seu sentido original é negativa) a  $d$  vem:

$$l = 1000 - 14 = 986 \text{ mm, donde}$$

$$B = \frac{1}{986} = 1.01 \text{ D e}$$

$$Amp = K - B = +4.24 - 1.01 = +3.23 \text{ D}$$

A acomodação ocular em uso com a adição prescrita é 1.65 D, metade da amplitude de acomodação, sendo a quantidade total de +3.23 D. A fracção é  $1.65/3.23 = 0.51$  que é praticamente igual à fracção adoptada para determinar a prescrita.

# Capítulo 9

## Convergência

---

### 9.1 Introdução

O termo convergência tem dois significados diferentes. Um descreve a posição relativa do eixo visual quando intersecta um determinado ponto próximo do olhar e o outro denota o movimento relativo dos eixos visuais quando a fixação muda de um ponto  $D$  mais distante para um ponto  $N$  mais próximo (ver figura 9.1).

A divergência tem os dois significados opostos. Se a fixação mudar de  $N$  para  $D$  ou nas proximidades, o eixo visual diverge da posição, mas na posição final deve manter um estado de convergência ou paralelismo. Um estado de divergência não pode ocorrer com uma fixação binocular precisa de um objecto real.

Se objectos próximos e distantes estiverem ambos no plano médio dos olhos, ambos os olhos aduzem (de aduzir, músculo ou relativo ao músculo que realiza a adução, introduzir) igualmente em convergência e abduzem (de abduzir, que produz a abdução, que conduz para fora) em divergência. Quando fixam um objecto posicionado à direita, o olho direito abduz e o olho esquerdo aduz (ver figura 9.1). Um caso especial acontece quando a fixação muda, encontrando-se os dois pontos objecto  $N$  e  $D$  no mesmo eixo visual do olho direito. Neste caso só o olho esquerdo tem necessidade de se mover para mudar a fixação de  $D$  para  $N$ .



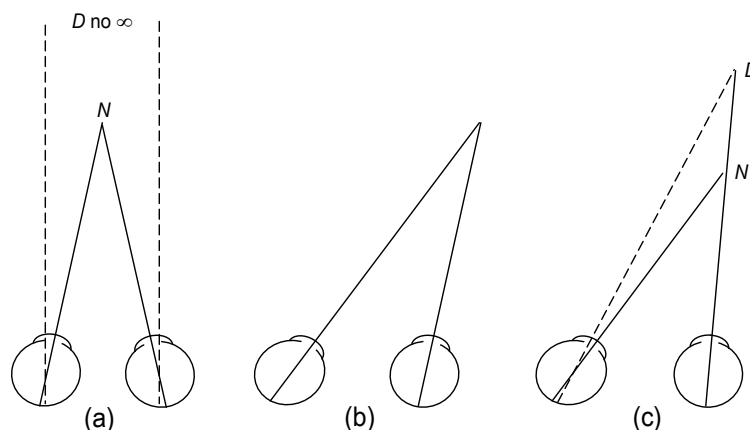


Figura 9- 1 Convergência, (a) convergência de um ponto distante D para um ponto próximo N; (b) fixação de um ponto fora do plano médio; (c) convergência assimétrica, os dois pontos estão alinhados com o olho direito.

## 9.2 Posições de repouso e de fixação

### 9.2.1 Posição anatômica de repouso

Os eixos orbitais divergem em cerca de  $22^\circ$  do plano médio. Assim, os eixos orbitais fazem entre si um eixo de aproximadamente  $45^\circ$ . Na ausência de qualquer enervação dos músculos extra-oculares, os olhos normalmente adoptam a posição de uma divergência e elevação moderadas.

### 9.2.2 Posição fisiológica de repouso

Esta é a posição assumida na ausência de qualquer estímulo e ocorre em resultado de um tónus mínimo dos músculos extra-oculares, tal como no caso de sonos profundos, ou sob anestesia geral. É uma posição divergente, mas menor que no caso da posição anatômica de repouso.

Quando os olhos fixam um objecto distante, os eixos visuais são paralelos, mas podem ter este alinhamento na ausência de um estímulo visual.

Como as fóveas num indivíduo normal são pontos correspondentes, o reflexo de fusão direcciona os olhos de tal forma que o objecto sob observação seja visto simultaneamente em ambas as fóveas. Se um olho é ocluído, ele pode tender a desviar-se da posição correcta para fixação.

Definem-se outras duas posições que são, a posição de fusão livre e a posição activa ou funcional. Estas duas posições são definidas como sendo a distância onde o ponto de fixação é longínquo e a posição de fusão livre é conhecida como a posição de repouso funcional. A posição de fusão livre é a posição adoptada pelos olhos quando os reflexos, postural e de fixação estão activos, mas com a fusão impedida. A posição activa ou funcional dos olhos é a sua posição quando os eixos de

fixação se intersectam no ponto de observação e ocorre quando os olhos estão paralelos para um objecto distante e convergem para um objecto próximo. A convergência teórica faz com que os olhos passem da posição de repouso anatómica para a posição de fusão livre para longe. A divergência (ou convergência fusional) faz com que os olhos passem da posição de fusão livre para a posição activa.

Quando as convergência próxima e acomodativa estão em jogo, os olhos encontram-se na posição de fusão livre em visão próxima. Tal como na visão ao longe, a convergência fusional será necessária para fazer com que os olhos adoptem as suas posições correctas para visão binocular.

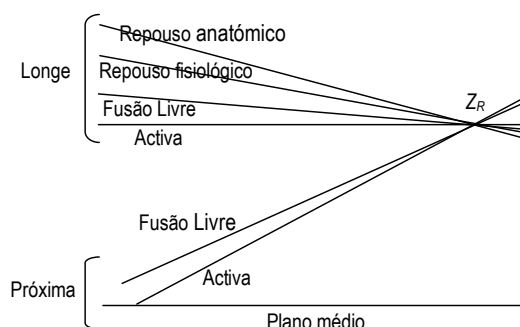


Figura 9- 2 Posições de repouso e posições activas do olho direito, quando olha para a esquerda.

### 9.3 Ponto próximo de convergência

Cada olho individualmente é capaz de aduzir até 40°, mas o máximo esforço de convergência pode corresponder a um ângulo muito menor que 80°. Este facto pode ser explicado pela diferente enervação super-nuclear no cérebro.

O ponto mais próximo no plano médio para o qual os olhos podem convergir é o ponto próximo de convergência. Poder ser determinado na prática pedindo ao paciente para observar uma linha preta vertical num cartão branco. O cartão é depois aproximado dos olhos do paciente e pede-se ao indivíduo que diga quando vir duas linhas. A posição do cartão é então lida para marcar o ponto próximo de convergência.

A desvantagem deste método reside no facto de alguns pacientes não observarem a diplopia (visão dupla), enquanto outros continuam a convergir mesmo que já não exista visão binocular (é melhor ter em conta os olhos do paciente à medida que a linha de teste se vai aproximando).

A posição do ponto próximo de convergência varia desde 20 mm, medidos a partir da cana do nariz, até mais de 500 mm. Os valores normais encontram-se entre 40 a 60 mm do plano corneal. Valores muito maiores que 160 mm podem apresentar sintomas em visão ao perto.

Apesar da diminuição da potência acomodativa com a idade, não existe uma diminuição da amplitude de convergência com o aumento da idade. É pouco provável que a convergência seja tão boa numa pessoa idosa como numa pessoa jovem, devido possivelmente à falta de uso e à perda de convergência acomodativa. Algumas pessoas de idade conseguem manter boas potências de convergência enquanto outras não.

A convergência é essencialmente um ajustamento para obter visão binocular ao perto, mas também pode ser produzida voluntariamente. Com prática muitas pessoas podem convergir (e acomodar) na ausência de um estímulo físico, tal como realmente estivessem a observar um objecto próximo.

## 9.4 Unidades de convergência

Uma rotação ocular em torno do eixo antero-posterior do olho é medida em graus ou radianos. No entanto os movimentos dos olhos também podem ser medidos em dioptrias prismáticas  $\Delta$ , uma unidade angular de grande conveniência em óptica oftálmica.

Na figura 9.3 podem observar-se dois olhos que rodaram para obter fixação binocular do ponto  $B$  no plano médio. A convergência de cada olho é o ângulo que rodaram a partir da sua direcção original. A linha que liga os dois centros de rotação  $Z_D$  e  $Z_E$  pode ser chamada linha base interocular e o seu comprimento é a distância interpupilar ( $DI$ ) para visão distante.

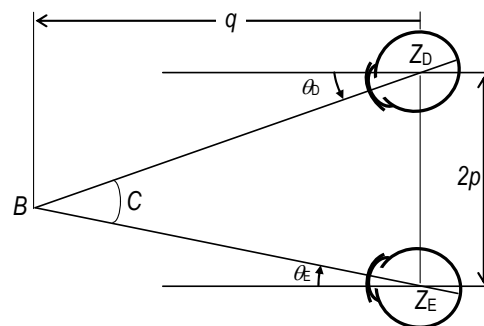


Figura 9- 3 Representação do ângulo total de convergência  $C$ .

O ângulo total de convergência  $C$ , é o ângulo entre os eixos visuais quando dirigidos para o ponto de fixação. Este ângulo é a soma algébrica dos ângulos de rotação  $\theta_D$  e  $\theta_E$  dos olhos direito e esquerdo, respectivamente. Se  $2p$  for a distância interocular,  $q$  a distância entre o ponto de fixação e a linha de base interocular e  $Q = 1/q$  (com  $q$  em metros) obtemos,

$$C = \tan^{-1} \left( -\frac{2p}{q} \right) \text{ com } q \text{ e } p \text{ em metros.}$$

o sinal negativo é devido à convenção de sinais utilizada.

$$C = \tan^{-1} (-2pQ)$$

como  $u$  (em  $\Delta$ ) =  $100 \tan u$  (em  $^\circ$ ) temos,

$$C \text{ (em } \Delta) = 100 \tan(\tan^{-1}(-2pQ)) = 100(-2pQ) = -2pQ \text{ (com } p \text{ em cm)}.$$

ou mais simplesmente,

$$C \text{ (em } \Delta) = -Q \times DI \text{ (com } DI \text{ em cm)}.$$

### Exemplo 9.1

Supondo que a distância do ponto de fixação à linha de base interocular é 250 mm e que a distância inter-pupilar é 60 mm, calcular o ângulo total de convergência em dioptrias prismáticas.

Como  $q = -250 \text{ mm}$  e  $DI = 60 \text{ mm}$ , temos:

$$C = -\left(-\frac{1}{250 \times 10^{-3}} \times 6\right) = 4 \times 6 = 24 \Delta$$

## **9.5 Convergência, acomodação e erro refractivo**

Quando se estuda a acomodação relativamente à convergência, é conveniente usar a linha de base interocular como origem da medição, em vez do ponto principal do olho. A exigência teórica de acomodação no caso da emetropia é  $-Q$ . Então a fixação binocular a uma distância dióptrica de  $-3 \text{ D}$  requer  $3 \text{ D}$  de acomodação e  $3 \times DI \Delta$  de convergência.

A relação entre convergência e acomodação é afectada por qualquer ametropia não corrigida e também por qualquer correcção em uso. Vamos começar com a emetropia para estabelecer uma norma.

### **9.5.1 Emetropia**

A figura 9.4 ilustra a necessidade teórica em acomodação e convergência à medida que o objecto se aproxima do olho emetrópico. A convergência total requerida ( $C$ ) é apresentada para três distâncias interpupilares diferentes.

A equação  $C \text{ (em } \Delta) = -Q \times DI$  representa a convergência total requerida como sendo  $-2pQ$  ( $p$  em cm), enquanto a acomodação é  $-Q$ . Então, a razão entre a convergência e a acomodação na emetropia é dada por

$$\frac{C}{A} = 2p = DI \text{ (em cm)}$$

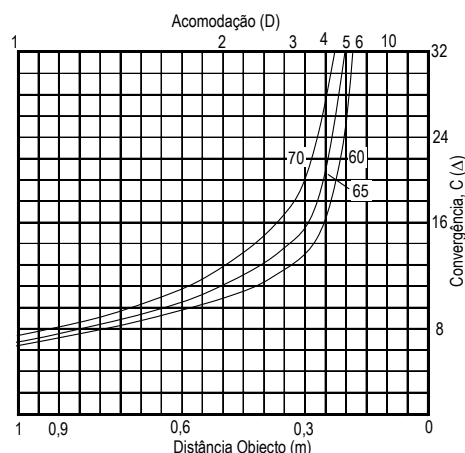


Figura 9- 4 Ângulo total de convergência C em dioptrias prismáticas, como função da distância objecto para diferentes distâncias interpupilares, 60,65 e 70 mm.

### 9.5.2 Ametropia não corrigida

Se o erro de refacção é  $K$  para longe, a acomodação requerida em visão próxima, a uma distância dióptrica  $Q$ , é  $(K - Q)$ , enquanto a convergência não sofre alterações sendo  $-2pQ$ . Então

$$\frac{C}{A} = 2p \left( \frac{Q}{Q - K} \right)$$

Esta razão tem uma gama de possíveis valores. O hipermetrope tem necessidade de acomodar mais que o emetrope enquanto convergem da mesma quantidade. Se, contudo, a acomodação habitualmente necessária para corrigir o erro de refacção para longe é ignorada e só a acomodação adicional requerida para visão ao perto for considerada, a razão  $C/A$  é a mesma que para o emetrope. Na miopia a situação é diferente. Um míope de  $-3.00$  D encontra-se no foco para objectos situados a  $1/3$  m e não acomoda para esta ou para distâncias maiores.

### 9.5.3 Emetrope com correcção para perto

Se as lentes dos óculos estão opticamente centradas para uma dada distância de trabalho, a convergência requerida não é afectada. Por outro lado, a necessidade acomodativa é reduzida pela adição da prescrição para leitura.

### 9.5.4 Ametropia corrigida com óculos

Vamos considerar que os óculos são de uso constante e que as lentes estão opticamente centradas para visão ao longe. Em visão ao perto, a acomodação ocular requerida difere da acomodação no ponto dos óculos, enquanto a convergência é afectada pelo efeito prismático das lentes. No exemplo que se segue (exemplo 9.2) podemos ver o que foi dito atrás.

#### Exemplo 9.2

Um míope bilateral com uma  $DI$  de 66 cm está corrigido com lentes de potência  $-6.00$  D a 14 mm do ponto principal dos olhos. Calcule a convergência e a acomodação requeridas quando se observa um objecto no plano médio a uma distância de 400 mm do plano dos óculos. Assuma que a distância entre os centros de rotação dos olhos estão a 26 mm deste plano.

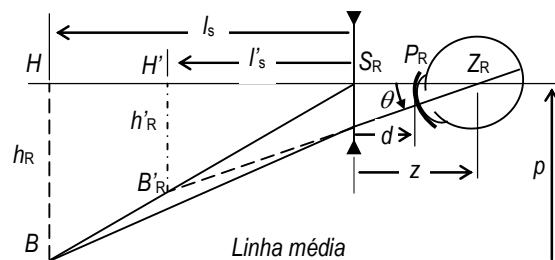


Figura 9- 5 Acomodação e convergência no olho míope corrigido com lente de óculos.

#### Para visão ao longe

$$F_{sp} = -6.00 \text{ D} \text{ então}$$

$$f'_{sp} = -\frac{1}{6} = -166,67 \text{ mm}$$

como  $d = 14 \text{ mm}$  então

$$k = -166,67 - 14 = -180,67 \text{ mm logo,}$$

$$K = -\frac{1}{180,67} = -5.53 \text{ D}$$

#### Para visão ao perto

$$L_s = -\frac{1}{400 \times 10^{-3}} = -2.50 \text{ D}$$

$$F_{sp} = -6.00 \text{ D}, \text{ então vem que,}$$

$$L'_s = -2.50 - 6.00 = -8.50 \text{ D}, \text{ donde}$$

$$l'_S = -\frac{1}{8.50} = -117,65 \text{ mm}$$

com  $d = 14 \text{ mm}$  vem que

$$l = -117,65 - 14 = -131,65 \text{ mm onde}$$

$$L = -\frac{1}{131,65} = -7,61 \text{ D}$$

A acomodação ocular é:  $A = K - L = -5.53 - (-7.60) = +2.07 \text{ D}$

O olho direito fixa  $B'_R$ , a imagem de  $B$  formada pela lente dos óculos. Se as distâncias  $HB$  e  $HB'_R$  são dadas por  $h_R (=p)$  e  $h'_R$ , respectivamente, então

$$h'_R = h_R = \frac{L_S}{L'_S} = 33 \times \frac{-2.50}{-8.50} = 9.71 \text{ mm}$$

e o ângulo de convergência em dioptrias prismáticas é dado por:

$$C = 2 \times 100 \left( \frac{h'_R}{H'Z_R} \right) = 2 \times \left( 100 \times \frac{h'_R}{H'S_R + S_R Z_R} \right) = 2 \times \left( 100 \times \frac{9.71}{117,65 + 26} \right) = 13.52 \Delta$$

e

$$C/A = \frac{13.52}{2.07} = 6.53$$

### 9.5.5 Ametropia corrigida com lentes de contacto

Neste ponto vamos ter atenção ao exemplo que se segue:

#### Exemplo 9.3

A partir do exemplo 9.2, calcular a convergência e a acomodação que é requerida com uma lente de contacto de correcção.

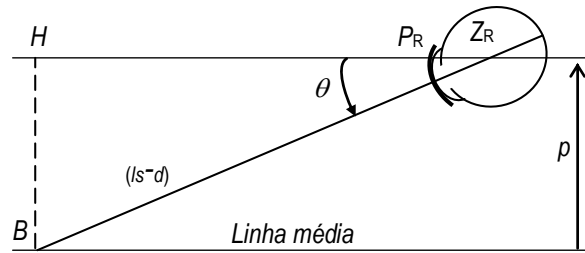


Figura 9- 6 Acomodação e convergência no olho míope corrigido com lente de contacto.

A distância entre o olho e o ponto de fixação  $B$  será  $-400 - 14 = -414$  mm

A acomodação ocular é  $A = -\frac{1}{-414} = +2.42$  D

A convergência em dioptrias prismáticas é  $C = -2pQ$  com

$$q = Z_R H = (l_s - z) = -400 - 26 = -426 \text{ mm}$$

donde  $Q = \frac{1}{q} = -\frac{1}{426} = -2.35$  D e  $C = -2pQ = -2 \times 3.3 \times (-2.35) = 15.51$  D

$$\frac{C}{A} = \frac{15.51}{2.42} = 6.41$$

Então a lente de contacto utilizada para correção produz mais convergência e acomodação que a lente dos óculos no exemplo 9.2. A razão entre a convergência e a acomodação é praticamente a mesma para os dois casos.



# Capítulo 10

## Apêndice 1

---

### 10.1 “Óptica” – Eugene Hecht, Fundação Calouste Gulbenkian

#### 10.1.1 Convenção de sinais

A luz propaga-se da esquerda para a direita e os símbolos para as quantidades mais importantes são os que se seguem:

Índice de refração – $n$	Raio de curvatura – $R$
Distância objecto – $s_o$	Distância imagem – $s_i$
Distância focal imagem – $f_o$	Distância focal imagem – $f_i$
Altura do objecto – $y_o$	Altura da imagem – $y_i$

A convenção de sinais é a seguinte:

Tabela 10- 1 Convenção de sinais para dioptros esféricos, lentes delgadas e espelhos esféricos

Distância objecto e distância focal objecto	Positivas para a esquerda de $V$
Distância imagem e distância focal imagem	Positiva para a direita de $V$
Raio de curvatura	Positivo se $C$ estiver à direita de $V$
Alturas objecto e imagem	Positivas acima do eixo óptico
Distância $x_o$	Positiva para a esquerda de $F_o$
Distância $x_i$	Positiva para a direita de $F_i$

Tabela 10- 2 Significado associado ao sinal dos vários parâmetros relativos a lentes delgadas, a dióptros esféricos e espelhos esféricos

Quantidade	Sinal	
	+	-
$s_o$	Objecto real	Objecto virtual
$s_i$	Imagem real	Imagem virtual
$f$	Lente convergente ou espelho côncavo	Lente divergente ou espelho convexo
$R$	Espelho convexo	Espelho côncavo
$y_o$	Objecto não invertido	Objecto invertido
$y_i$	Imagem não invertida	Imagem invertida
$M_T$	Imagem não invertida	Imagem invertida

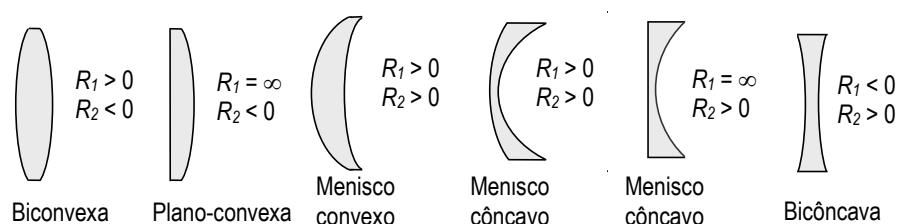


Figura 10- 1 Secção de lentes simples esféricas. A superfície da esquerda é a nº 1, por ser a primeira a ser interceptada pela luz quando esta se propaga da esquerda para a direita. O seu raio é  $R_1$ .

### 10.1.2 Dióptros esféricos

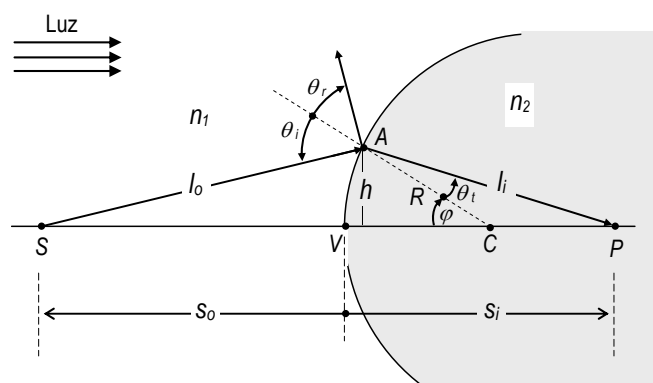


Figura 10- 2 Refracção num dióptro esférico ( $n_2 > n_1$ ). Focos conjugados.

### 10.1.2.1 Fórmulas

Equações de refração em dióptros esféricos:

$$\frac{n_1}{l_o} + \frac{n_2}{l_i} = \frac{1}{R} \left( \frac{n_2 s_i}{l_i} - \frac{n_1 s_o}{l_o} \right)$$

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Distâncias focais objecto e imagem de uma superfície de refração esférica:

$$f_o = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$$

$$f_i = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$$

### 10.1.3 Lentes delgadas

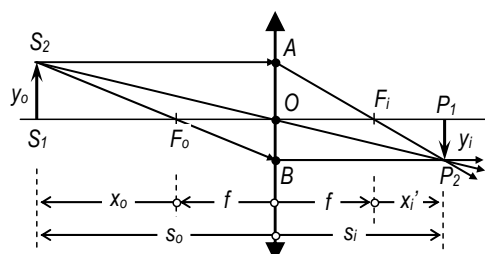


Figura 10- 3 Localização do objecto e da imagem criada por uma lente delgada.

#### 10.1.3.1 Fórmulas

Equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = (n_l - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Para lentes delgadas  $\lim_{s_i \rightarrow 0} s_o = f_o$  e  $\lim_{s_o \rightarrow 0} s_i = f_i$ , donde  $f_o = f_i$  e os índices não são necessários. Assim:

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{Equação dos fabricantes de lentes})$$

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad (\text{Fórmula de Gauss})$$

$$x_o x_i = f^2 \quad (\text{Equação de Newton})$$

Note-se que para uma lente de índice de refração  $n_l$  num meio de índice de refração  $n_m$ , se tem:

$$\frac{1}{f} = (n_{lm} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

onde  $n_{lm} = \frac{n_l}{n_m}$ .

A ampliação lateral ou transversa  $M_T$  é igual à razão entre a dimensão transversal da imagem final formada por um sistema óptico e a dimensão original do objecto:

$$M_T \equiv \left| \frac{y_i}{y_o} \right|$$

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o}$$

Um valor positivo de  $M_T$  indica que a imagem não é invertida (é direita, isto é, com a mesma orientação do objecto), enquanto que um valor negativo de  $M_T$  significa que a imagem é invertida relativamente ao objecto que a originou. Todas as imagens reais formadas por lentes delgadas são invertidas.

### 10.1.3.2 Associação de lentes delgadas

No caso de uma associação de lentes delgadas, começa-se por construir a imagem formada pela primeira lente do objecto original e com esta imagem intermédia, usando novamente o traçado de raios,

constrói-se a imagem final da associação de lentes (ver figura 10-5). A imagem produzida por um sistema de lentes para além de poder ser obtida através do traçado de raios (normalmente três raios, um dirigido ao ponto focal da lente, outro dirigido ao centro da lente e outro paralelo ao eixo óptico), também pode ser obtida através das equações relativas à associação de duas ou mais lentes. A equação mais geral é a de um sistema de lentes separadas por uma determinada distância entre as lentes ( $d$ ). Caso as lentes estejam em contacto essa distância é nula e a referida equação simplifica-se.

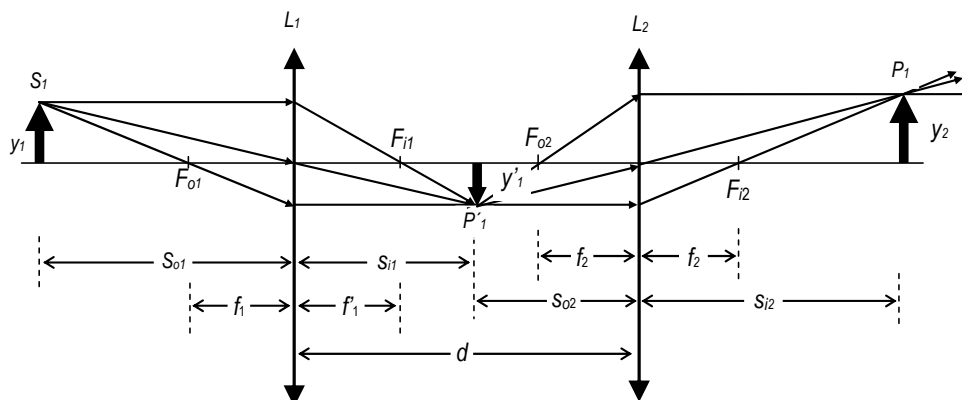


Figura 10- 4 Duas lentes delgadas a uma distância  $d$ , superior à soma das suas distâncias focais. Neste caso a imagem intermédia é real e pode-se começar com o ponto  $P_1$  e considerá-lo como objecto real para a lente  $L_2$ .

Para  $L_1$  vamos ter:

$$\frac{1}{s_{i1}} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{s_{o1}}$$

ou

$$s_{i1} = \frac{s_{o1} f_1}{s_{o1} - f_1}$$

Para  $L_2$  vamos ter:

$$\frac{1}{s_{i2}} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{s_{o2}}$$

$$s_{i2} = \frac{s_{o2} f_2}{s_{o2} - f_2}$$

como  $s_{o2} = d - s_{i1}$  vem:

$$s_{i2} = \frac{f_2 d - \frac{f_2 f_1 s_{o1}}{s_{o1} - f_1}}{d - f_2 - s_{o1} f_1 (s_{o1} - f_1)}$$

Para a associação de lentes delgadas a ampliação transversa total é igual ao produto das ampliações individuais, isto é,

$$M_T = M_{T1} \cdot M_{T2}$$

ou seja

$$M_T = \frac{f_1 s_{i2}}{d(s_{o1} - f_1) - s_{o1} f_1}$$

Pode-se calcular ainda a distância focal anterior e posterior na associação de lentes como:

$$d.f.a = \frac{f_1(d - f_2)}{d - (f_1 + f_2)}$$

$$d.f.p = \frac{f_2(d - f_1)}{d - (f_1 + f_2)}$$

quando as lentes estão em contacto (separação entre as lentes é nula,  $d \rightarrow 0$ ) a distância focal anterior e posterior são iguais, e vem:

$$d.f.a = d.f.p = \frac{f_2 f_1}{f_2 + f_1}$$

e

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

donde para um sistema de N lentes em contacto vamos ter:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots + \frac{1}{f_N}$$

## 10.1.4 Espelhos esféricos

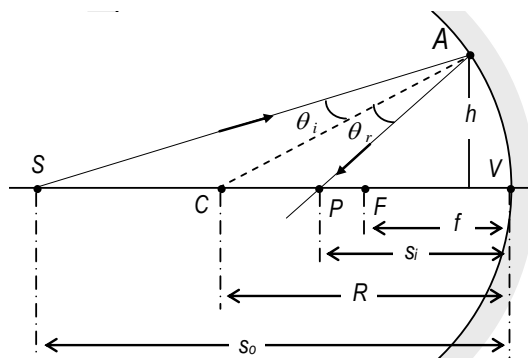


Figura 10- 5 Espelho esférico côncavo. Focos conjugados.

### 10.1.4.1 Fórmulas

Equação dos espelhos esféricos:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = -\frac{2}{R}$$

e que

$$f_o = f_i = -\frac{R}{2}$$

O aumento transversal produzido por um espelho esférico é dado por:

$$M_T \equiv \left| \frac{y_i}{y_o} \right| = -\frac{s_i}{s_o}$$

## Apêndice 2

---

### 10.2 “*Introduction to Optics*” – L. Pedrotti e F. Pedrotti, Prentice Hall.

#### 10.2.1 Convenção de sinais

Desenhando um sistema de eixos cartesianos na superfície reflectora ou refractora, tal que a origem do sistema de eixos  $O$  coincida com o vértice da superfície,  $V$ , teremos que:

- As distâncias imagem e objecto são positivas para a direita do vértice e negativas para a esquerda de  $V$ .
- O raio de curvatura é positivo quando o centro de curvatura  $C$  está à direita do vértice e negativo quando  $C$  está a esquerda de  $V$ .
- As dimensões verticais são positivas acima do eixo horizontal (eixo óptico) e negativas abaixo desse eixo.

Neste livro (*Introduction to Optics*), o centro de curvatura  $C$  é o centro da superfície esférica e o ponto  $V$  é o vértice da calote esférica. A linha que passa por  $V$  designa-se por eixo principal. Tomando a origem das coordenadas em  $V$ , todas as quantidades medidas para a direita de  $V$  são positivas e, para a esquerda, são negativas.

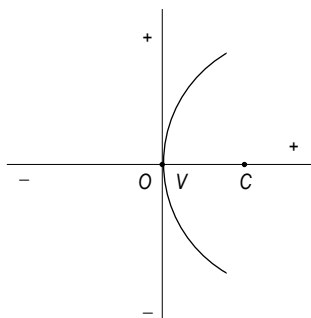


Figura 10- 6 Convenção de sinais



As letras utilizadas para as várias quantidades são:

Índice de refacção -  $n$

Raio de curvatura -  $r$

Distância objecto -  $u$

Distância imagem -  $v$

Distância focal objecto e imagem -  $f$

## 10.2.2 Espelhos esféricos

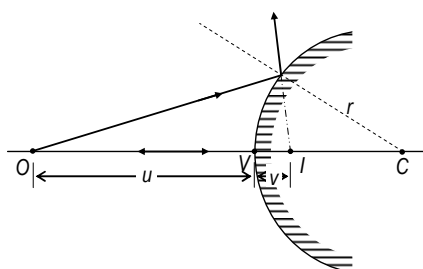


Figura 10- 7 Reflexão numa superfície esférica e localização do ponto imagem.

### 10.2.2.1 Fórmulas

Fórmula de Descartes

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{r}$$

Ponto focal

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{r} \text{ ou } f = \frac{r}{2}$$

Aumento transversal produzido por um espelho esférico é dado por:

$$m = \frac{\text{altura da imagem}}{\text{altura do objecto}} = \left| \frac{h_i}{h_o} \right| = -\frac{v}{u}$$

## 10.2.3 Superfícies de refração esféricas

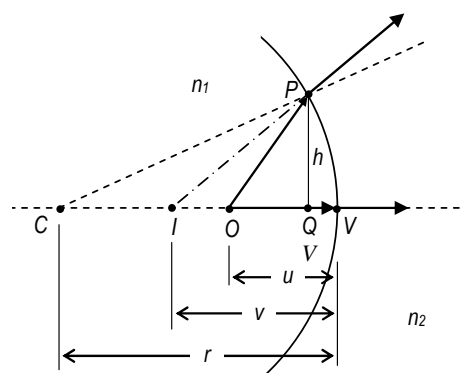


Figura 10- 8 Refracção numa superfície esférica côncava ( $n_2 > n_1$ ).

### 10.2.3.1 Fórmulas

Fórmula de Descartes

$$\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

O aumento transversal produzido por uma superfície refractora esférica é dado por:

$$m = \frac{\text{altura da imagem}}{\text{altura do objecto}} = \frac{h_i}{h_0} = \frac{n_1 v}{n_2 u}$$

## 10.2.4 Lentes esféricas

### 10.2.4.1 Fórmulas

Fórmula de Descartes para lentes delgadas

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Equação dos fabricantes de lentes

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

donde combinando as duas últimas equações temos

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

O aumento transversal produzido por uma superfície refractora esférica é dado por :

$$m = \frac{\text{altura da imagem}}{\text{altura do objecto}} = \left| \frac{h_i}{h_o} \right| = \frac{v}{u}$$

#### 10.2.4.2 Associação de lentes delgadas

Para lentes em contacto temos  $\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \dots$

## Apêndice 3

### 10.3 “Optics” – M. Freeman, Butterworths.

#### 10.3.1 Convenção de sinais

A convenção de sinais adoptada neste livro é a seguinte:

- Todas as distâncias são medidas desde a lente ou espelho. As distâncias que se apresentem no mesmo sentido da luz incidente são positivas e as em sentido inverso são negativas.
- Todas as distâncias perpendiculares ao eixo óptico são medidas a partir do eixo óptico. Todas as que estiverem acima do eixo óptico são positivas e as que estiverem abaixo do eixo óptico são negativas.
- Os ângulos medidos no sentido anti-horário são positivos e os ângulos medidos no sentido horário são negativos.

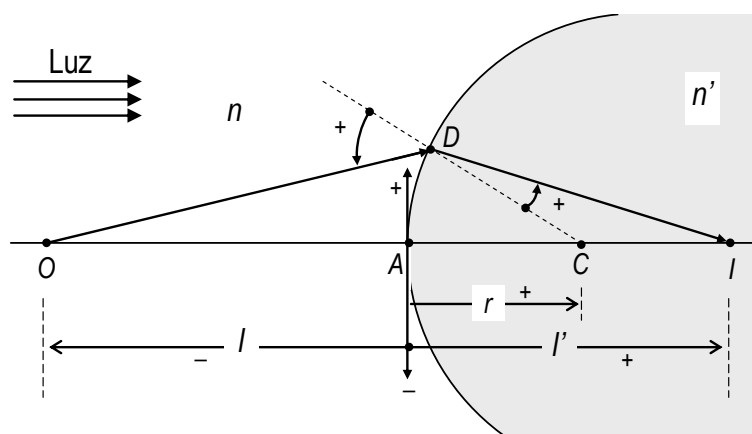


Figura 10- 9 Convenção de sinais adoptada.

### 10.3.2 Espelhos esféricos

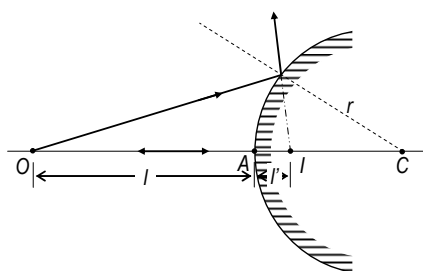


Figura 10- 10 Reflexão numa superfície esférica.

#### 10.3.2.1 Fórmulas

Fórmula de Descartes

$$-\frac{1}{l'} = \frac{1}{l} - \frac{2}{r}$$

Ponto focal

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} = \frac{2}{r} \text{ ou } f = \frac{r}{2}$$

Aumento transversal produzido por um espelho esférico é dado por:

$$M = \frac{\text{altura da imagem}}{\text{altura do objecto}} = \left| \frac{h'}{h} \right| = -\frac{l'}{l}$$

### 10.3.3 Superfícies de refração esféricas

#### 10.3.3.1 Fórmulas

Fórmula de Descartes

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}$$

O aumento transversal produzido por uma superfície refractora esférica é dado por:

$$M = \frac{\text{altura da imagem}}{\text{altura do objecto}} = \left| \frac{h'}{h} \right| = \frac{n l'}{n' l}$$

### 10.3.4 Lentes esféricas

#### 10.3.4.1 Fórmulas

Fórmula de Descartes para lentes delgadas

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Equação dos fabricantes de lentes

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

onde combinando as duas últimas equações temos

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$$

Equação de Newton é dada por

$$-xx' = f^2 = f'^2$$

O aumento transversal produzido por uma superfície refractora esférica é dado por:

$$m = \frac{\text{altura da imagem}}{\text{altura do objecto}} = \left| \frac{h'}{h} \right| = \frac{l'}{l}$$

### 10.3.4.2 Associação de lentes delgadas

Para lentes em contacto temos  $\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \dots$ , quando as lentes estão separadas por uma

distância  $d$ , a expressão anterior deixa de ser válida sendo que

$$\frac{1}{l'_1} - \frac{1}{l_1} = \frac{1}{f_1}$$

e

$$\frac{1}{l'_2} - \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f_2}$$

com

$$l_2 = l'_1 - d$$

## Apêndice 4

---

### 10.4 “Física IV” – Halliday, Resnick and Krane

#### 10.4.1 Convenção de sinais

##### Para espelhos esféricos:

O centro de curvatura  $C$  é o centro da superfície esférica e o ponto  $c$  é o centro do espelho. A linha que passa por  $C$  e  $c$  designa-se por eixo central. A distância focal de um espelho côncavo é positiva e a distância focal de um espelho convexo é negativa. As imagens reais formam-se no mesmo lado do espelho em que se encontra o objecto e as imagens virtuais formam-se do lado oposto ao do objecto. As distâncias objecto e imagem para objectos e imagens reais são positivas, e são negativas no caso dos objectos e imagens serem virtuais. Assim pode-se afirmar que as distâncias objecto são tidas como quantidades positivas quando os objectos se encontram no espaço do objecto e as distâncias imagem são tidas como positivas quando se encontram no espaço da imagem. De notar que para o caso dos espelhos, os espaços objecto e imagem coincidem (ver figura 10.11). Relativamente ao raio de curvatura, será uma quantidade positiva para um espelho côncavo e negativa para um espelho convexo.

##### Para superfícies de refração e lentes esféricas:

O centro de curvatura  $C$  é o centro da superfície de refração ou da lente esférica. As imagens reais formam-se no lado da superfície de refração ou da lente que é oposto ao do objecto, enquanto que as imagens virtuais formam-se no mesmo lado do objecto. O lado em que se encontra o objecto é chamado espaço objecto e o lado em que encontra a imagem é chamado espaço imagem. As distâncias objecto e imagem para objectos e imagens reais são positivas e negativas no caso de virtuais. As distâncias objecto são tidas como quantidades positivas quando os objectos se encontram no espaço do objecto e as distâncias imagem são tidas como positivas quando se encontram no espaço da imagem. Para as superfícies de refração e lentes esféricas, os espaços objecto e imagem estão em lados opostos (ver figura 10.12). Quanto ao raio de curvatura, quando um objecto está em frente de uma superfície de



refracção convexa o raio de curvatura é positivo e quando está frente a uma superfície côncava é negativo.

As letras utilizadas para as várias quantidades são:

Índice de refração -  $n$

Distância objecto -  $p$

Distância imagem -  $i$

Distância focal objecto e imagem -  $f$

Raio de curvatura -  $r$

### 10.4.2 Espelhos esféricos

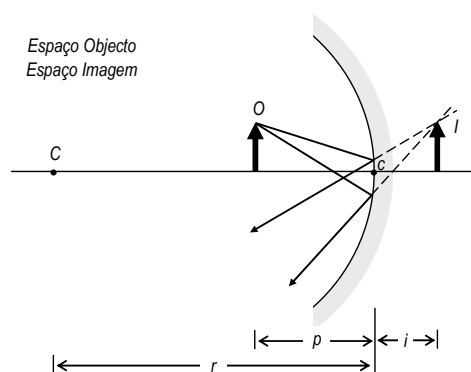


Figura 10- 11 Espelho côncavo, com a formação de uma imagem virtual de um objecto real.

#### 10.4.2.1 Fórmulas

O ponto focal de um espelho esférico é dado por:

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{r} \text{ ou } f = \frac{r}{2}$$

e a Fórmula de Descartes para os espelhos esféricos é dada por:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$$

quanto ao aumento transversal produzido por um espelho esférico é dado por:

$$|m| = \frac{h'}{h} \text{ e } m = -\frac{i}{p}$$

### 10.4.3 Superfícies de refração esféricas

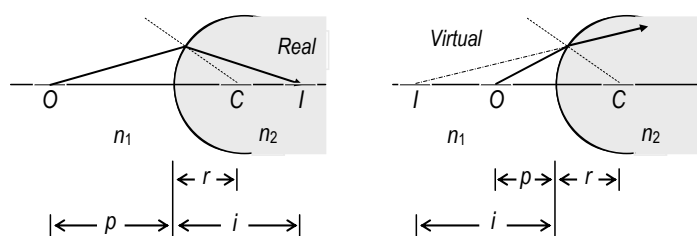


Figura 10- 12 Formação de imagens reais e virtuais numa superfície de refração convexa.

#### 10.4.3.1 Fórmulas

A fórmula de Descartes é dada por:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

e o aumento transversal produzido por uma superfície de refração esférica é dada por:

$$m = -\frac{i}{p}$$

### 10.4.4 Lentes esféricas finas

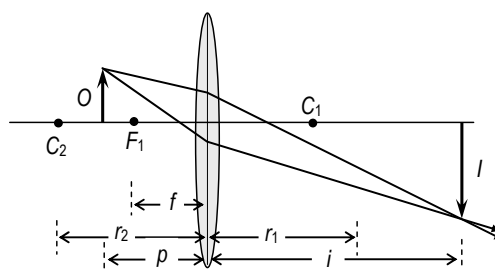


Figura 10- 13 Lente fina convergente, com a formação de uma imagem real a partir de um objecto real.

### 10.4.4.1 Fórmulas

A equação das lentes finas é dada por (equação de Descartes):

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$$

Para a equação dos fabricantes de lentes finas no ar tem-se que

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

se a lente estiver imersa num meio que não o ar com índice de refacção  $n_{\text{meio}}$ , na equação dos fabricantes de lentes substitui-se o índice de refacção  $n$  por  $n/n_{\text{meio}}$ .

A ampliação lateral será dada por:

$$|m| = \frac{h'}{h} \text{ e } m = -\frac{i}{p}$$

### 10.4.4.2 Associação de lentes delgadas

Quando um objecto  $O$  está colocado em frente de um sistema de duas lentes cujo eixo central coincide, podemos localizar a imagem final do sistema das lentes através de dois passos:

Passo 1: Seja  $p_1$  a distância do objecto à primeira lente. Aplicando a equação das lentes finas obtemos a distância  $i_1$  da imagem produzida pela primeira lente ( $L_1$ ).

Passo 2: Ignorando a presença da lente  $L_1$ , consideramos a imagem obtida no passo 1 como objecto para a segunda lente ( $L_2$ ). Se o novo objecto estiver localizado depois da lente  $L_2$  (espaço imagem), a distância objecto  $p_2$  para essa lente é tida como negativa, caso contrário,  $p_2$  é tida como positiva. Determina-se então a distância  $i_2$  da imagem final produzida pela lente  $L_2$  através da equação das lentes finas. A ampliação lateral total será dada por:

$$M = m_1 m_2$$

onde  $m_1$  é a ampliação lateral produzida pela lente  $L_1$  e  $m_2$  é a ampliação lateral produzida pela lente  $L_2$ .

## Apêndice 5

### 10.5 “Física” – Alonso e Finn, Addison Wesley

#### 10.5.1 Convenção de sinais

Neste livro o centro de curvatura  $C$  é o centro da superfície esférica e o ponto  $O$  é o vértice da calote esférica. A linha que passa por  $O$  designa-se por eixo principal. Tomando a origem das coordenadas em  $O$ , todas as quantidades medidas para a direita de  $O$  são positivas e, para a esquerda, são negativas. A lista de convenção de sinais utilizada é:

As letras utilizadas para as várias quantidades são:

Índice de refração -  $n$

Distância objecto -  $p$

Distância imagem -  $q$

Distância focal objecto e imagem -  $f$

Raio de curvatura -  $r$

#### 10.5.2 Espelhos esféricos

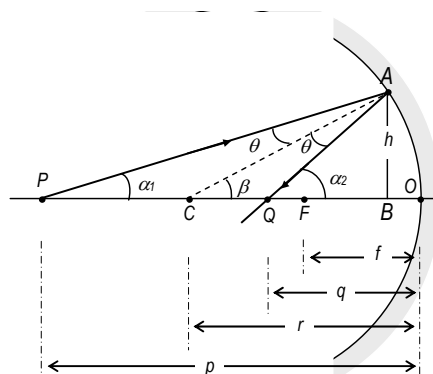


Figura 10- 14 Trajectória de um raio reflectido numa superfície esférica.

A convenção de sinais para espelhos esféricos é a seguinte:

Tabela 10- 3 Convenção de sinais em espelhos esféricos		
	+	-
Distância objecto	Real	Virtual
Distância imagem	Real	Virtual
Distância focal	Convergente	Divergente
Raio de curvatura	Côncavo	Convexo

### 10.5.2.1 Fórmulas

Fórmula de Descartes

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}$$

Ponto focal

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{r} \text{ ou } f = \frac{r}{2}$$

Aumento transversal produzido por um espelho esférico é dado por (ver figura 10-15):

$$M = \frac{\text{altura da imagem}}{\text{altura do objecto}} = \left| \frac{ab}{AB} \right| = -\frac{q}{p}$$

o sinal negativo deve-se ao facto da distância  $ab$  ser negativa (figura 10-15), pois é uma imagem invertida.

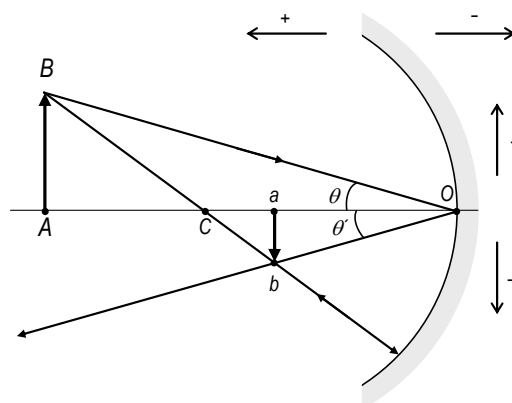


Figura 10- 15 Cálculo do aumento de um espelho esférico.

### 10.5.3 Superfícies de refração esféricas

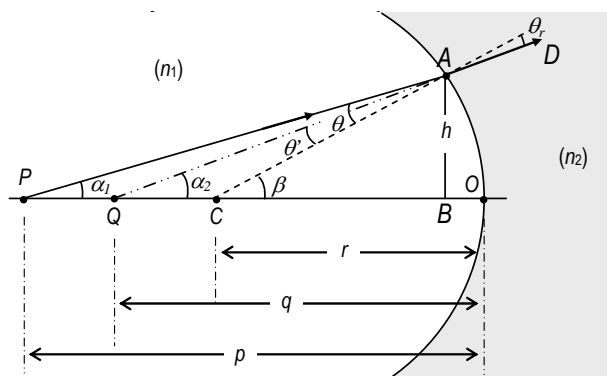


Figura 10- 16 Trajectória de um raio refractado numa superfície esférica.

A convenção de sinais para uma superfície refractora esférica é a seguinte:

Tabela 10- 4 Convenção de sinais para uma superfície refractora esférica

	+	-
Distância objecto	Real	Virtual
Distância imagem	Virtual	Real
Distância focal	Convergente	Divergente
Raio de curvatura	Côncavo	Convexo

#### 10.5.3.1 Fórmulas

Fórmula de Descartes

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r} = \frac{n_1}{f}$$

Distância focal objecto ( $f_o$ )

$$f = \frac{n_1}{n_1 - n_2} r$$

Distância focal imagem ( $f_i$ )

$$f' = -\frac{n_2}{n_1 - n_2} r$$

O aumento transversal produzido por uma superfície refractora esférica é dado por (ver figura 10-17):

$$M = \frac{\text{altura da imagem}}{\text{altura do objecto}} = \left| \frac{ab}{AB} \right| = \frac{n_1 q}{n_2 p}$$

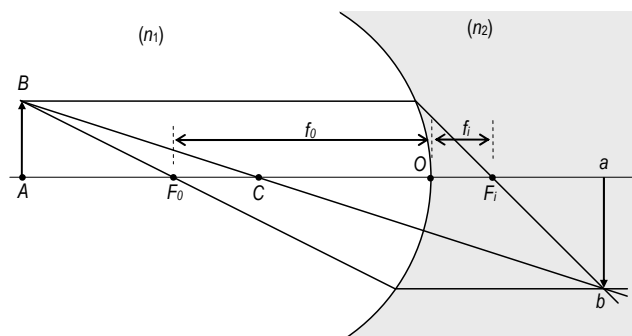


Figura 10- 17 Raios principais para uma superfície refractora esférica e formação da imagem através da mesma superfície de refacção em que  $n_1 > n_2$ .

Poder-se-á construir figuras semelhantes para os casos em que  $n_1 < n_2$  e para superfícies convexas.

#### 10.5.4 Lentes esféricas

A convenção de sinais para lentes é a mesma para uma superfície refractora esférica.

##### 10.5.4.1 Fórmulas

Fórmula de Descartes para lentes delgadas

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = (n-1) \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Equação dos fabricantes de lentes no ar

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

donde combinando as duas últimas equações temos

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

quanto aos focos objecto e imagem eles estão localizados simetricamente em ambos os lados da lente delgada. Se  $f$  for positiva, a lente é convergente, e se for negativa, a lente é divergente.

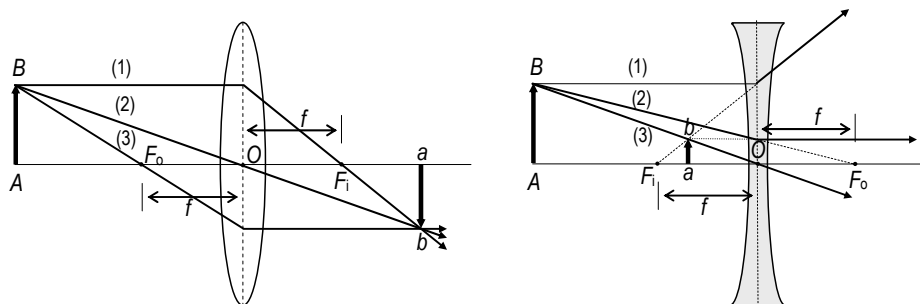


Figura 10- 18 Raios principais e formação de imagem em lentes delgadas convergentes e divergentes.

O aumento transversal produzido por uma superfície refractora esférica é dado por (ver figura 10-18):

$$M = \frac{\text{altura da imagem}}{\text{altura do objecto}} = \left| \frac{ab}{AB} \right| = \frac{q}{p}$$

#### 10.5.4.2 Associação de lentes delgadas

Para lentes em contacto temos

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

para lentes separadas por uma distância  $t$  temos

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q'} = \frac{1}{f_1} \text{ para a 1ª lente}$$

e

$$\frac{1}{q' + t} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2} \text{ para a 2ª lente}$$



## Bibliografia

- Arthur Bennett. *Clinical Visual Optics*, Butterworths, 1989.
- Dias Obregon, Enrique Gonzalez. *Optometria I*, Universidade Complutense de Madrid, 1992-93.
- Edwards Keith. *Optometry*, Butterworths, 1988.
- Eugene Hecht. *Optics*, 3rd ed., Addison Wesley Longman, 1998.
- Francisco Barra Lazaro. *Optometria I: Concepto de Optometria*, Universidade Complutense de Madrid, 1992-93.
- Franck Pedrotti. *Introduction to Optics*, Prentice-Hall, 1987.
- Halliday, Resnick, Krane. *Physics*, 5th ed., John Wiley & Sons, 2002.
- Halliday, Resnick, Walker. *Fundamentals of Physics*, 5th ed., John Wiley & Sons, 1997.
- J. Boyd Eskridge, John F. Amos, Jimmy D. Bartlett. *Clinical Procedures in Optometry*, J.B.Lippincott, 1991.
- Jurgen Meyer-Arendt. *Introduction to Classical and Modern Optics*, 4<sup>th</sup> ed., Prentice-Hall, 1995.
- Leno Pedrotti, Franck Pedrotti. *Optics and Vision*, Prentice-Hall, 1998.
- Marcelo Alonso, Edward Finn. *Física*, Addison Wesley Longman, 1992.
- M.H. Freeman. *Optics*, 10th Edition, Butterworths, 1990.
- Sandra Mogo. *Optometria I*, Universidade Beira Interior, 2003.